

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«Харьковский политехнический институт»

Мякшина И.Г. Глебова Е.Г.

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ТОЭ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ
“ИНЖЕНЕРНАЯ ЭЛЕКТРОФИЗИКА”**

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол №2 от 22.06.2006 г.

ХАРЬКОВ НТУ «ХПИ» 2007

ББК 31.2
М99
УДК 621.3.01

Рецензенты: П.Н. Чернышев, канд. техн. наук, профессор, Национальный технический университет «ХПИ»,
А.Г. Сосков, д-р техн. наук, профессор, Харьковская национальная академия городского хозяйства

Текст лекцій містить розділи: фізичні основи електротехніки, лінійні електричні кола постійного і гармонічного струму, трифазні кола, чотириполюсники, перехідні процеси в лінійних колах, кола з розподіленими параметрами, нелінійні електричні та магнітні кола.

Призначений для студентів фізико-технічних і електротехнічних спеціальностей.

Мякшина И.Г.

М99 Текст лекций по ТОЭ для студентов физико-технического факультета по специальности «Инженерная электрофизика»/ И.Г. Мякшина, Е.Г. Глебова. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – 348 с. – На рус.яз.

ISBN 978-966-593-474-5

Текст лекций содержит изложение разделов: физические основы электротехники, линейные электрические цепи постоянного и гармонического тока, трехфазные цепи, четырехполюсники, переходные процессы в линейных цепях, цепи с распределенными параметрами, нелинейные электрические и магнитные цепи.

Предназначено для студентов физико-технических и электротехнических специальностей.

Ил. 317. Табл. 1 Библиогр.: 3 назв.

ББК 31.2

ISBN 978-966-593-474-5

И.Г. Мякшина, Е.Г. Глебова. 2007

ВВЕДЕНИЕ

Курс теоретических основ электротехники (ТОЭ) базируется на курсах физики и высшей математики и является основой для изучения всех специальных электротехнических дисциплин, поэтому изучению этого предмета следует уделить особое внимание.

На физико-техническом факультете по специальности “Инженерная электрофизика” курс ТОЭ изучается в течение двух семестров и включает в себя: лекционные, практических и лабораторные занятия. Курс состоит из трех частей:

1. Физические основы электротехники;
2. Теория линейных электрических цепей;
3. Теория нелинейных электрических цепей.

Каждая часть курса имеет ряд разделов, которые будут указаны в порядке изложения.

В каждом семестре предусмотрено по две расчетно-графических работы и две модульных контрольных работы.

Для допуска к экзамену в конце каждого семестра студент обязан сдать расчетно-графические работы, лабораторные работы и написать контрольные работы на положительную оценку.

По курсу ТОЭ регулярно проводятся консультации (2 часа в неделю).

Общий объем курса составляет 135 учебных часов.

Вопросы, набранные мелким шрифтом, рассматриваются на практических занятиях.

I. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

В первой части рассматриваются основные электрические и магнитные явления, используемые в электротехнике. Здесь устанавливаются определения различных физических величин, служащих для характеристики электрических и магнитных явлений; выясняется методика вычисления этих величин; рассматриваются общие законы электромагнитных явлений в интегральной форме.

Все электрические и магнитные явления происходят в электромагнитном поле.

Электромагнитное поле - это особый вид материи, или особый электрофизический процесс, который проявляется в силовом воздействии на неподвижные и движущиеся электрические заряды.

Электромагнитное поле состоит из двух неразрывно взаимосвязанных и друг друга взаимно обуславливающих частей:

1. Электрическое поле;
2. Магнитное поле.

Эти поля неотделимы друг от друга и всегда существуют одновременно.

Но при определенных условиях они не влияют друг на друга и можно их рассматривать раздельно.

Мы рассматриваем именно такие случаи в разделе “Физические основы электротехники” (ФОЭ).

1. Электростатическое поле

Электрическое поле, создаваемое неподвижными и неизменными во времени электрическими зарядами, называется электростатическим полем.

1.1. Напряженность электростатического поля

Основной физической величиной, которая характеризует электрическое поле, является напряженность электрического поля. Это векторная величина и ее принято обозначать \vec{E} .

Главное внешнее проявление электростатического поля заключается в том, что на любой заряд, помещенный в это поле, действует механическая сила. Это явление используется для определения напряженности электростатического поля.

Считают, что напряженность электростатического поля E численно равна пределу отношения силы, действующей на заряд, к величине заряда, при условии, что эта величина стремится к нулю.

$$\vec{E} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{Q}, \quad (1.1)$$

где \vec{F} – сила; Q – заряд.

Направление вектора \vec{E} совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд $Q > 0$, помещенный в данную точку поля.

Для графического изображения электростатического поля используют линии вектора напряженности или силовые линии электрического поля.

Силовой линией электрического поля называется такая воображаемая линия, в каждой точке которой вектор напряженности \vec{E} направлен по касательной к ней. Принято считать, что силовые линии начинаются на положительных и оканчиваются на отрицательных зарядах.

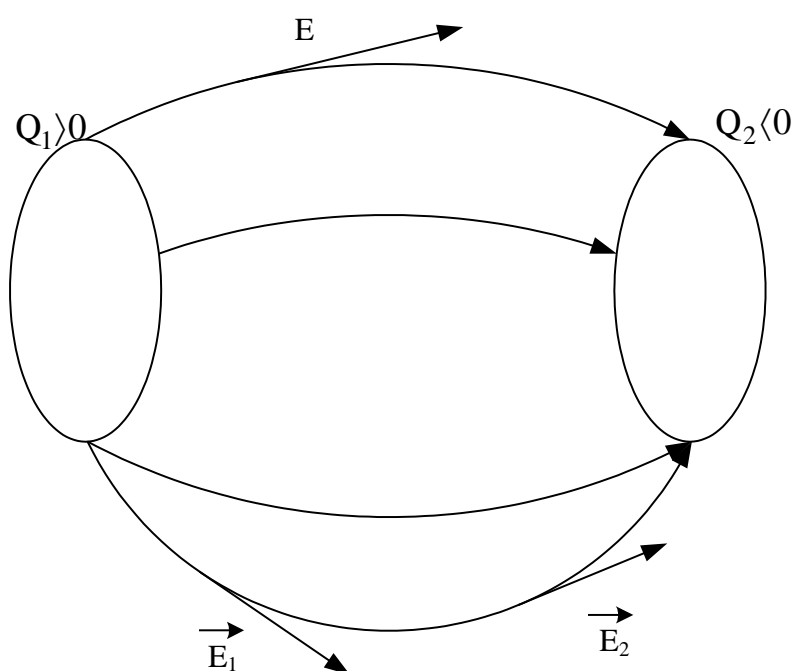


Рисунок 1.1

Таких линий можно провести сколько угодно. Понятие «силовая линия» используется и в других типах полей.

1.2. Электрическое поле точечного заряда

Под точечным зарядом понимается заряженное тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстояниями, на которых мы их рассматриваем. Считают, что это геометрическая точка, в которой расположен заряд.

Точечный заряд в окружающем его пространстве создает электрическое поле.

Для того, чтобы определить напряженность электрического поля точечного заряда в любой точке поля, воспользуемся законом Кулона, известным из физики.

Согласно закону Кулона, сила взаимодействия двух точечных зарядов прямо пропорциональна величинам этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по линии, соединяющей эти заряды (рис. 1.2):

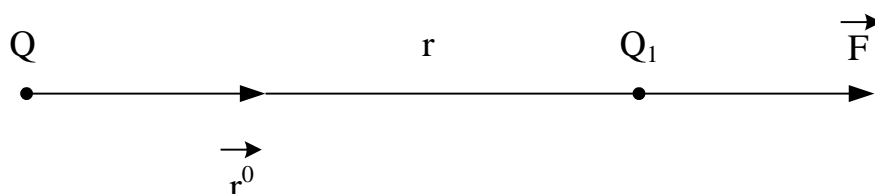


Рисунок 1.2

$$\vec{F} = \frac{QQ_1}{4\pi\epsilon_a r^2} \vec{r}_0, \quad (1.2)$$

где \vec{r}_0 – единичный радиус-вектор, направленный по линии, соединяющей заряды; 4π – множитель, принятый в системе СИ; ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

Согласно определению напряженности, в той точке, где расположен заряд Q_1 ,

$$\vec{E} = \lim_{Q_1 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{Q_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2} \vec{r}_0. \quad (1.3)$$

Пробный заряд Q_1 должен быть ничтожно мал, чтобы его поле не искажало поле заряда Q . При подстановке \vec{F} в выражение \vec{E} заряд Q_1 сокращается.

В системе СИ расстояния измеряются в метрах [м], заряды – кулонах [Кл], абсолютная диэлектрическая проницаемость измеряется в фарадах, деленных на метр [Ф/м], сила измеряется в ньютонах [Н].

Для пустоты (и воздуха) диэлектрическая проницаемость обозначается ϵ_0 и в системе СИ равна:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \approx 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) \text{ Ф/м}$$

Это важная физическая константа, называемая электрической постоянной. Ее нужно помнить.

Поле точечного заряда можно характеризовать силовыми линиями, которые направлены так же, как и напряженность поля, по радиусам (рис. 1.3).

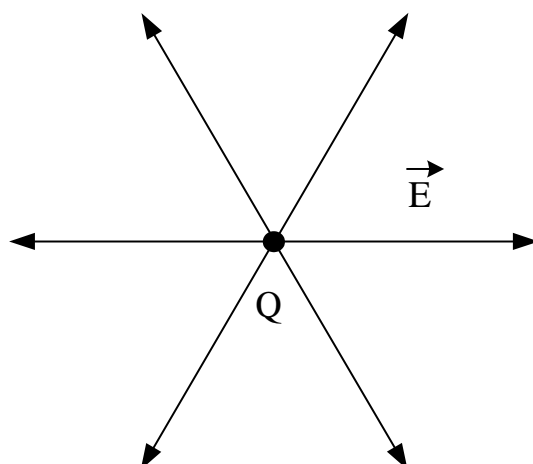


Рисунок 1.3

Формула (1.3) справедлива только для одного точечного заряда. Если зарядов несколько, то создаваемые ими напряженности нужно суммировать геометрически, т. к. это векторные величины (рис. 1.4).

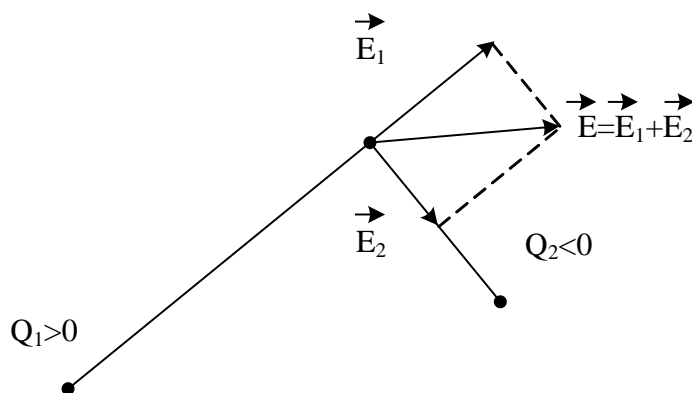


Рисунок 1.4

Если поле создается заряженным телом конечных размеров, то для определения напряженности в какой – либо точке нельзя применять формулу (1.3). Следует разбить весь заряд на бесконечно малые элементарные заряды dQ , которые можно считать точечными зарядами (рис. 1.5).

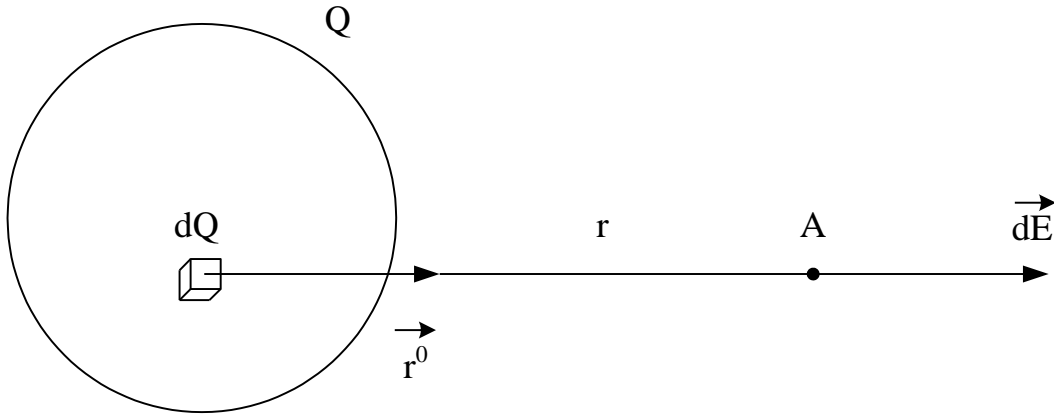


Рисунок 1.5

Напряженность $d\vec{E}$, создаваемая зарядом dQ в точке А, определяется аналогично формуле (1.3):

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_a r^2} \vec{r}^o.$$

Полная напряженность поля в точке А определяется интегрированием:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_a r^2} \vec{r}^o \quad (1.4)$$

При интегрировании по формуле (1.4) суммирование бесконечно малых напряженностей следует производить геометрически, т.к. $d\vec{E}$ – векторные величины.

В заряженном теле заряды могут быть распределены тремя различными способами:

а) по длине l с линейной плотностью $\tau = dQ/dl$; тогда $dQ = \tau dl$, причем τ измеряется в [Кл/м]; dl – в [м].

$$\vec{E} = \int_l \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a r^2} \vec{r}^o. \quad (1.4a)$$

б) по поверхности S с поверхностной плотностью $\sigma = dQ/dS$; тогда $dQ = \sigma dS$, причем σ измеряется в [Кл/м²]; S – в [м²]; в этом случае:

$$\vec{E} = \int_s \frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_a r^2} \vec{r}^o. \quad (1.4б)$$

в) по объему V с объемной плотностью $\rho = \frac{dQ}{dV}$; при этом $dQ = \rho dV$ и ρ измеряется в [Кл/м³], V - в [м³],

$$\vec{E} = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0. \quad (1.4 \text{ в})$$

Пример Пусть проволочное кольцо радиуса a равномерно по длине заряжено зарядом с линейной плотностью τ . Определим напряженность поля в центре кольца – точке 0 (рис.1.6).

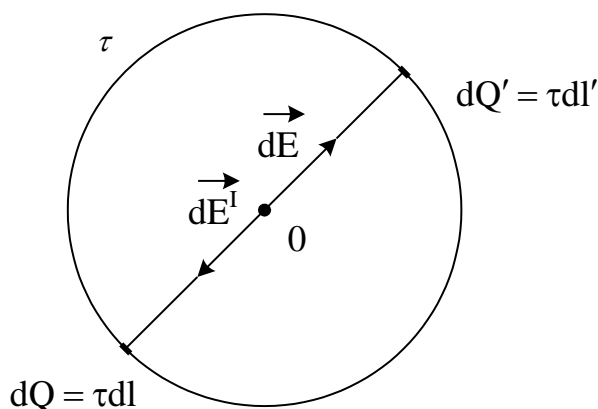


Рисунок 1.6

Если выделить диаметрально противоположные элементы кольца dl и dl' , на которых находятся элементарные заряды dQ и dQ' , то создаваемые ими элементарные напряженности в точке 0 компенсируются, т.е. их геометрическая сумма равна нулю.

Поскольку любому элементу кольца dl можно найти диаметрально противоположный dl' , то напряженность электрического поля в точке 0 равна нулю: $E_0 = 0$.

1.3. Работа сил электрического поля. Электрическое напряжение и потенциал

Поместим в электрическое поле заряд Q . На него будет действовать сила $\vec{F} = Q\vec{E}$

Пусть этот заряд перемещается из точки 1 в точку 2 по некоторому пути l (рис. 1.7). При этом совершается работа.

Физическая величина, численно равная работе по перемещению единичного точечного положительного заряда из точки 1 в точку 2, называется *напряжением* между этими точками:

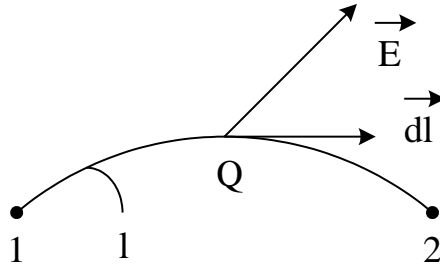


Рисунок 1.7

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = Q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l};$$

$$U_{12} = \frac{A}{Q} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.5)$$

Поскольку напряжение измеряется в вольтах [В], l -в метрах [м], то напряженность электрического поля измеряется в вольтах, деленных на метр [В/м].

Покажем, что напряжение в электрическом поле не зависит от пути интегрирования, а зависит от положения точек 1 и 2. Для этого рассмотрим перемещение единичного точечного заряда вдоль замкнутого пути (рис. 1.8).

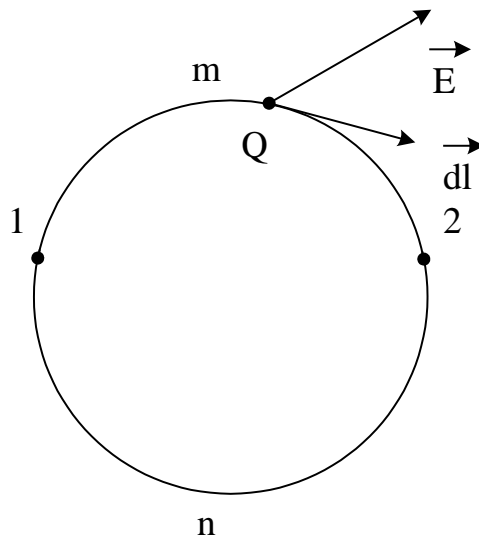


Рисунок 1.8

Поскольку начальная и конечная точки этого пути совпадают, то энергия поля после возвращения заряда в точку 1 не изменится, и суммарная работа равна нулю:

$$\oint \vec{E} dl = \int_{1m2} \vec{E} dl + \int_{2n1} \vec{E} dl = \int_{1m2} \vec{E} dl - \int_{1n2} \vec{E} dl = 0; \quad (1.6)$$

$$\int_{1m2} \vec{E} d\vec{l} = \int_{1n2} \vec{E} d\vec{l} = U_{12}.$$

Таким образом, в электрическом поле напряжение между двумя точками зависит только от координат этих точек.

Уравнение

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (1.7)$$

называется условием потенциальности электростатического поля. Это значит, что можно ввести понятие потенциала некоторой точки поля, являющегося функцией координат этой точки: $\varphi = \varphi(x, y, z)$, а напряжение между двумя точками выразить как разность их потенциалов:

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (1.8)$$

Если принять $\varphi_2 = 0$, то получим: $\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$.

Таким образом, потенциал данной точки электростатического поля численно равен работе по перемещению единичного точечного положительного заряда из данной точки поля в ту точку, потенциал которой принят равным нулю.

$$\varphi_1 = \int_1^P \vec{E} d\vec{l}, \quad \varphi_P = 0, \quad (1.9)$$

где P – фиксированная точка, потенциал которой принят равным нулю. Часто фиксированную точку P располагают в бесконечности:

$$\varphi_1 = \int_1^\infty \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.10)$$

Соотношение (1.9) называется интегральной связью между \vec{E} и φ . Выражение (1.10) в некоторых случаях неприменимо, о чем будет сказано в дальнейшем.

В практических задачах считают равным нулю потенциал земли.

1.4. Потенциал поля точечного заряда

Для определения потенциала точки A используют выражение (1.10), причем напряженность поля точечного заряда направлена вдоль радиуса (рис. 1.9).

Определим потенциал точки A .

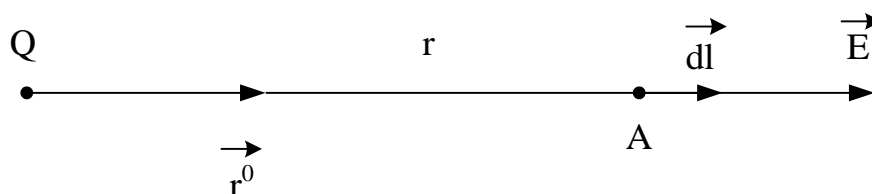


Рисунок 1.9

Поскольку работа в электростатическом поле, не зависит от того, каким образом единичный положительный заряд перемещается из точки A в бесконечность, где $\varphi = 0$, то выберем путь интегрирования так, чтобы направления векторов \vec{E} и $d\vec{l}$ совпадали; тогда в выражении (1.9) скалярное произведение векторов превратится в обычное произведение. Для этого элемент пути надо направить вдоль радиуса.

$$\varphi_A = \int_A^\infty \vec{E} d\vec{l} = \int_A^\infty E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r}.$$

Таким образом,

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (1.11)$$

Потенциал – скалярная величина, и если взять несколько точечных зарядов, то потенциал любой точки поля можно определить как сумму потенциалов, создаваемых каждым из зарядов:

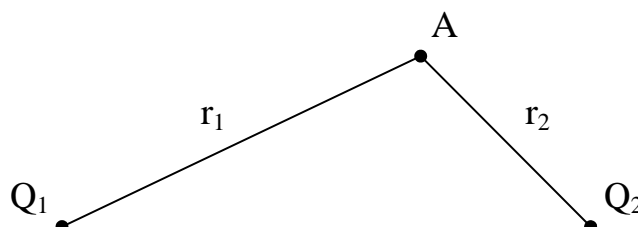


Рисунок 1.10

$$\varphi_A = \varphi_{A(1)} + \varphi_{A(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right). \quad (1.12)$$

Если поле создается пространственным зарядом, то его следует разбить на элементарные точечные заряды и в заданной точке алгебраически просуммировать создаваемые ими элементарные потенциалы:

$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (1.13)$$

При этом возможны 3 способа определения элементарного заряда:

- а) $dQ = \tau dl$, если заряд линейный;
- б) $dQ = \sigma dS$, если заряд поверхностный;
- в) $dQ = \rho dV$, если заряд объемный.

Пример

В качестве примера определим потенциал в центре проволочного кольца радиуса a , равномерно по длине заряженного зарядом с линейной плотностью τ (рис.1.11).

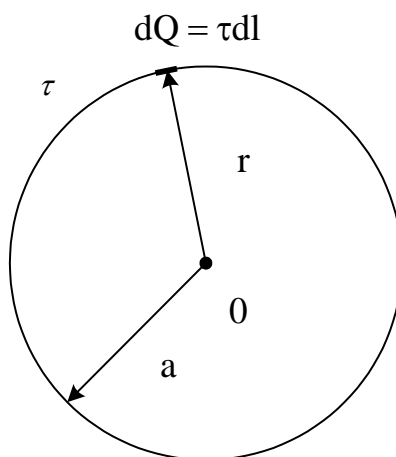


Рисунок 1.11

$$\varphi_0 = \int_l \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a r} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a a} \int_l dl = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a a} \cdot 2\pi a = \frac{\tau}{2\epsilon_a}.$$

1.5. Эквипотенциальные линии

Эквипотенциальной поверхностью называют геометрическое место точек равного потенциала в пространстве. Эквипотенциальной линией называют след эквипотенциальной поверхности на плоскости чертежа.

Таким образом, электростатическое поле можно наглядно изобразить как совокупность силовых и эквипотенциальных линий.

Силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах. Эквипотенциальные линии всегда замкнуты сами на себя.

Эквипотенциальные и силовые линии в любой точке поля пересекаются под прямым углом.

Для уединенного точечного заряда уравнением эквипотенциальной поверхности является $r = \text{const}$, т.к. потенциал зависит только от радиуса. Следовательно, эквипотенциальная поверхность представляет собой сферу, а эквипотенциальная линия – окружность. Картина поля точечного заряда выглядит следующим образом (рис.1.12).

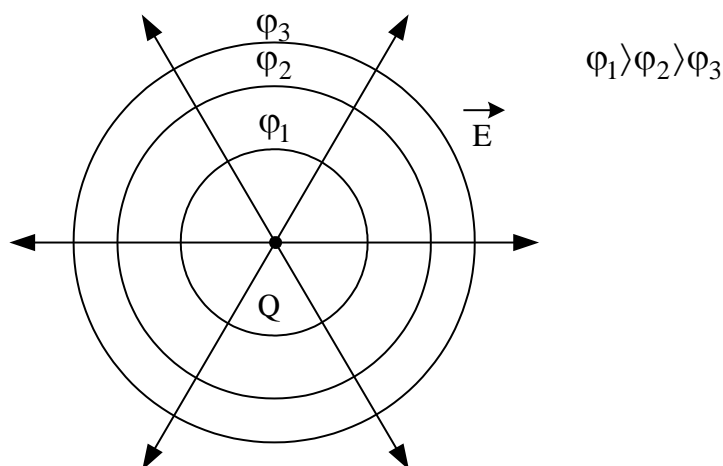


Рисунок 1.12

Из выражения (1.11) следует, что потенциал поля точечного заряда уменьшается с ростом радиуса r . Следовательно, вектор \vec{E} направлен в сторону убывания потенциала.

1.6. Дифференциальная связь между напряженностью и потенциалом

Рассмотрим две эквипотенциальные поверхности, потенциал которых отличается на бесконечно малую величину $d\varphi$. Пусть $\varphi_1 > \varphi_2$. Тогда вектор \vec{E} направлен от большего потенциала к меньшему, т. е. от φ_1 к φ_2 по нормали к эквипотенциальной поверхности (рис. 1.13).

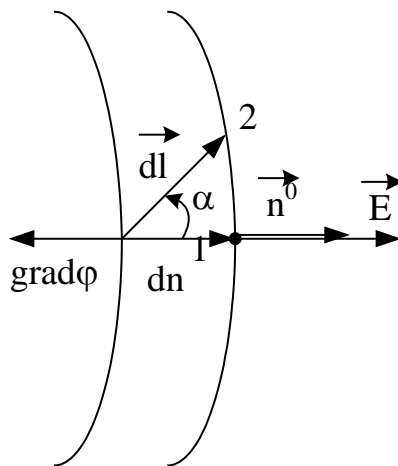


Рисунок 1.13

Найдем напряжение между точками 1 и 2:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \vec{E} d\vec{l} = Edl \cos \alpha = Edn = d\varphi,$$

отсюда

$$\vec{E} = \frac{d\varphi}{dn} \vec{n}^0,$$

где dn – кратчайшее расстояние между эквипотенциальными поверхностями; \vec{n}^0 - единичный вектор нормали, направленный от φ_1 к φ_2 .

Из математики известно, что градиент скалярной функции – вектор, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания этой функции:

$$\text{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{dn} (-\vec{n}^0).$$

Вектор \vec{E} , наоборот, направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала.

Таким образом,

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi \quad (1.14)$$

Эта связь называется дифференциальной связью между \vec{E} и φ , поскольку градиент – дифференциальный оператор.

В декартовой системе координат

$$\begin{aligned} \text{grad}\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}, \\ \vec{E} &= E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}, \end{aligned}$$

где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – единичные векторы (орты).

Тогда

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}, E_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, E_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \\ E &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для сокращения записи применяются оператор ∇ (набла – оператор Гамильтона):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Тогда $\text{grad } \varphi = \nabla\varphi$ и $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Известны формы записи $\text{grad}\varphi$ в полярных, сферических координатах и других ортогональных системах координат.

1.7. Электрическое поле в вещественной среде. Поляризация диэлектриков

Выясним, как воздействует электрическое поле на диэлектрики, и какие изменения претерпевает само электрическое поле, когда оно находится в диэлектрике.

В веществах электрические заряды бывают двух типов: свободные и связанные заряды.

Свободными называются заряды, которые под воздействием сил поля могут свободно перемещаться в веществе, их перемещение не ограничивается внутримолекулярными силами.

Под связанными понимают электрические заряды, входящие в состав вещества и удерживаемые в определенных положениях внутримолекулярными силами. В любом веществе сумма положительных связанных зарядов равна сумме отрицательных связанных зарядов.

Хотя в диэлектрике всегда имеется некоторое количество свободных зарядов, но проводимость диэлектриков во много раз ($10^{16} - 10^{20}$ раз) меньше проводимости металлических проводников.

Поэтому пока будем считать, что диэлектрики идеальны, т.е. в них есть только связанные заряды.

Электрическим диполем называется система двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов, расположенных на небольшом расстоянии l друг от друга (рис.1.14).

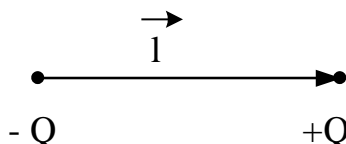


Рисунок 1.14

Векторная величина $\vec{p} = Q\vec{l}$ называется электрическим моментом диполя.

Под воздействием электрического поля диэлектрик поляризуется. При этом происходит перераспределение связанных зарядов.

В веществах с неполярными молекулами молекулы приобретают свойства электрических диполей, частично ориентированных в направлении электрического поля.

В веществах с полярными молекулами, которые при отсутствии внешнего поля расположены хаотически, под воздействием электрического поля происходит частичная ориентировка молекулярных диполей в направлении электрического поля.

При отсутствии внешнего электрического поля геометрическая сумма электрических моментов диполей в любом объеме равна нулю.

Интенсивность поляризации характеризуется вектором поляризации \vec{P} , причем

$$\vec{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_k}{V} . \quad (1.16)$$

Для большинства диэлектриков между величинами вектора напряженности внешнего поля \vec{E} и вектора поляризации \vec{P} существует пропорциональность:

$$\vec{p} = \chi_a \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (1.17)$$

где χ_a - абсолютная электрическая восприимчивость (измеряется в фарадах, деленных на метр); χ - относительная электрическая восприимчивость (безразмерная величина).

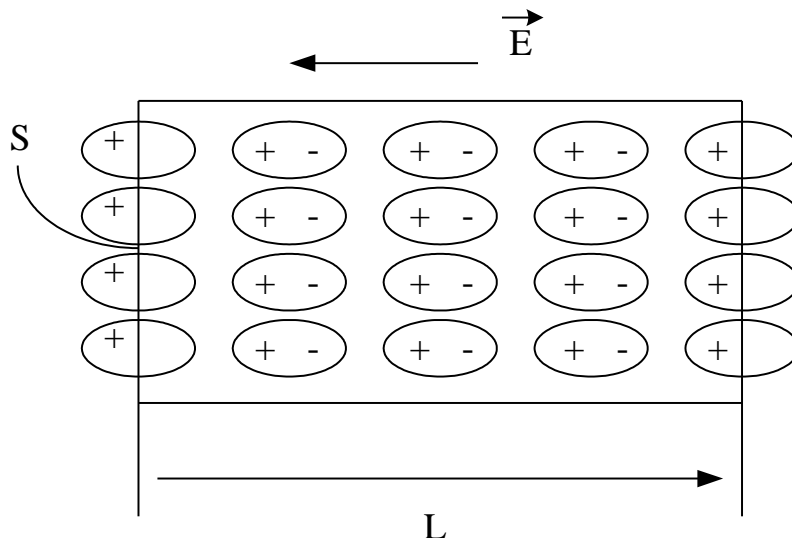


Рисунок 1.15

При поляризации диэлектриков на их поверхностях обнажаются связанные заряды.

Выведем формулу, связывающую вектор поляризации с плотностью связанных зарядов и суммарным связанным зарядом, который возникает на поверхности поляризованного диэлектрика.

Рассмотрим некоторый объем поляризованного диэлектрика в виде цилиндра длиной L и площадью основания S (рис.1.15).

Внутри этого объема все связанные заряды взаимно компенсируются, и лишь на его торцах обнажаются связанные заряды противоположного знака.

Весь этот объем можно рассматривать как электрический диполь с электрическим моментом.

$$p = Q_{\text{связ}} \cdot L = \sigma_{\text{связ}} \cdot SL,$$

где $\sigma_{\text{связ}}$ - поверхностная плотность связанных зарядов на торцах цилиндра.

Определим величину вектора поляризации:

$$P = p/V = \sigma_{\text{связ}} \cdot SL / (SL) = \sigma_{\text{связ}}; \quad (1.18)$$

$$P = \sigma_{\text{связ}}.$$

Поскольку $[\sigma_{\text{связ}}] = \text{Кл}/\text{м}^2$, то и P измеряется в кулонах, деленных на квадратный метр $[\text{Кл}/\text{м}^2]$.

Если форма тела более сложная, то в разных точках поверхности могут быть различные P и $\sigma_{\text{связ}}$, но в каждой точке равны между собой $\sigma_{\text{связ}}$ и нормальная составляющая вектора поляризации P_n . Суммарный связанный заряд на внешней поверхности S определяется следующим образом:

$$Q_{\text{связ}} = \int_S \sigma_{\text{связ}} dS = \int_S P_n dS = \int_S \vec{P} \cdot \vec{dS}. \quad (1.19)$$

Следует обратить внимание, что при поляризации диэлектрика связанные заряды в его объеме создают электрическое поле, направленное против внешнего поля, в результате чего напряженность поля в диэлектрике оказывается меньше, чем в окружающем его вакууме (воздухе).

1.8. Поток вектора сквозь поверхность

Рассмотрим некоторую поверхность S в электрическом поле (рис. 1.16). Разобьем поверхность на элементарные площадки dS . Вектор \vec{dS} направлен по наружной нормали к поверхности.

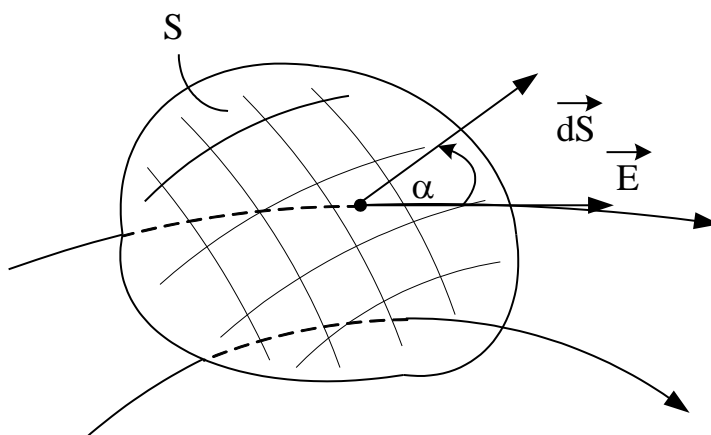


Рисунок 1.16

Элементарным потоком вектора \vec{E} называется величина

$$d\hat{O}_E = E dS \cos \alpha = \vec{E} \cdot \vec{dS}.$$

Поток вектора сквозь поверхность S равен:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad (1.20)$$

1.9. Теорема Гаусса для вакуума

Из курса физики известно, что поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность S в вакууме равен полному заряду заключенному внутри этой поверхности, деленному на электрическую постоянную:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = Q/\epsilon_0. \quad (1.21)$$

Это выражение называется теоремой Гаусса в интегральной форме для вакуума.

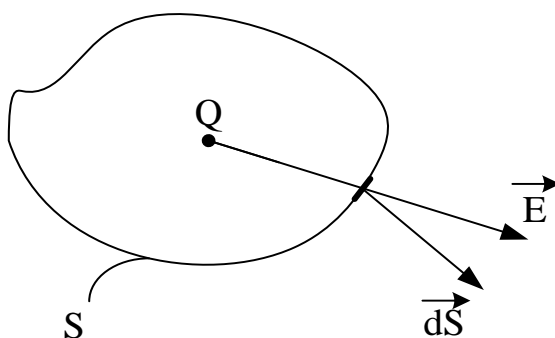


Рисунок 1.17

1.10. Теорема Гаусса в интегральной форме для вещественной среды

Расположим заряд Q в диэлектрике и окружим его замкнутой поверхностью (рис. 1.18). Поскольку расстояния между молекулами значительно больше размеров самих молекул, то можно считать, что электрическое поле проходит в вакууме, а влияние диэлектрика учесть связанными зарядами, которые будут некомпенсированы в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью S . Заряды, не скомпенсированные внутри объема, равны по величине и противоположны по знаку тому связанному заряду, который вытеснен электрическим полем за пределы поверхности S .

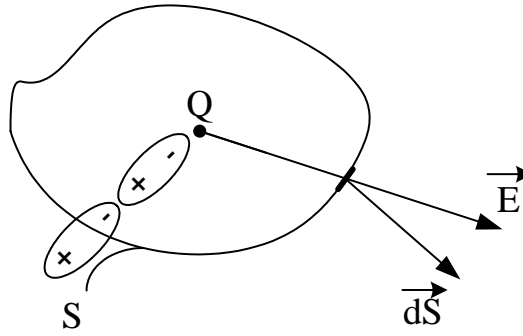


Рисунок 1.18

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = (Q + \sum Q_{\text{связ}}) / \epsilon_0 = \left(Q - \oint_S \vec{P} d\vec{S} \right) / \epsilon_0; \quad (1.22)$$

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = Q.$$

Обозначим $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Эта величина называется вектором электрического смещения, или индукцией электрического поля.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q \quad (1.23)$$

Поток вектора электрического смещения сквозь замкнутую поверхность S равен полному свободному заряду, заключенному внутри этой поверхности.

Эта форма записи теоремы Гаусса называется также постулатом Максвелла.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (1.24)$$

где ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды; ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Итак, $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$, или $\vec{E} = \vec{D} / \epsilon_a$.

Поэтому теорему Гаусса можно записать еще в одной форме:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = Q / \epsilon_a \quad (1.23a)$$

Поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность S равен полному заряду, заключенному внутри этой поверхности, отнесенному к абсолютной диэлектрической проницаемости среды.

Теорема Гаусса в интегральной форме справедлива при любой форме замкнутой поверхности и для произвольного распределения зарядов внутри этой поверхности. Однако использовать ее для определения величины напряженности в какой-либо точке поля можно лишь в том случае, если рассматриваемое поле симметрично и в нем можно выбрать поверхность, в каждой точке которой \vec{E} одинакова по величине и совпадает по направлению с $d\vec{S}$.

Таковыми свойствами обладает, например, поле точечного заряда. Найдем напряженность поля точечного заряда с помощью теоремы Гаусса. Для этого окружим заряд Q сферической поверхностью радиуса r и применим к этой поверхности теорему Гаусса (рис. 1.19).

В каждой точке этой поверхности векторы \vec{E} и $d\vec{S}$ направлены по радиусу, так как нормаль к сфере также направлена вдоль радиуса. Поэтому скалярное произведение векторов переходит в обычное, а величину E можно вынести из-под знака интеграла.

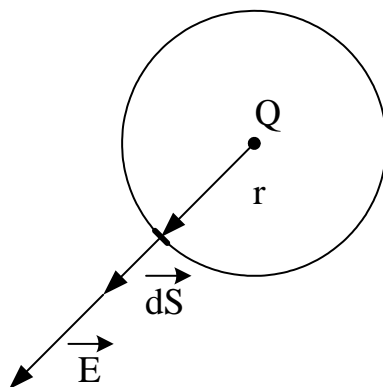


Рисунок 1.19

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = ES = E4\pi r^2 = Q/\epsilon_a,$$

откуда $E = Q/(4\pi\epsilon_a r^2)$, что совпадает с выражением, полученным ранее.

1.11. Электрическое поле равномерно заряженной электрической оси

Электрической осью называется бесконечно длинный прямолинейный проводник, равномерно по длине заряженный зарядом с линейной плотностью τ .

Для нахождения напряженности электрического поля в произвольной точке А проведем через эту точку цилиндрическую поверхность радиуса r , которая состоит из двух оснований и боковой поверхности (рис. 1.20).

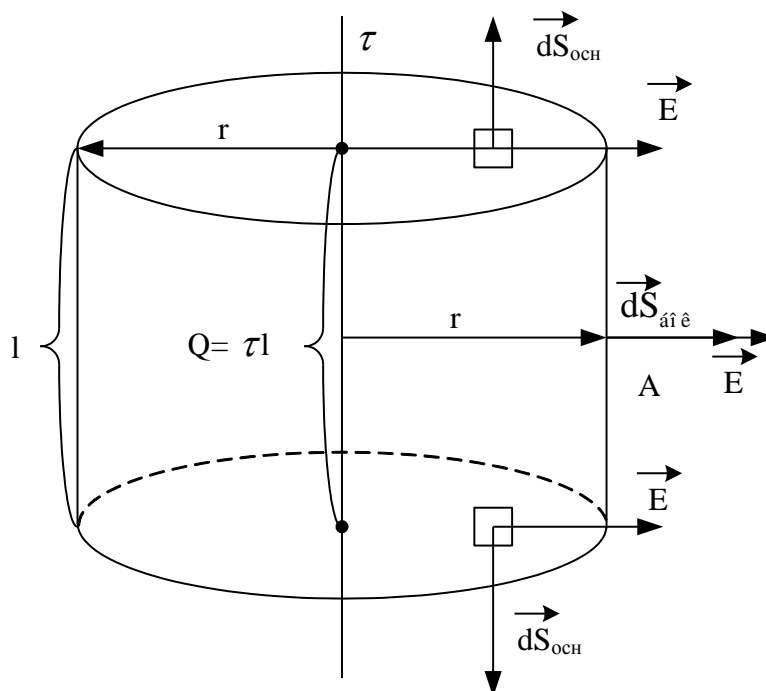


Рисунок 1.20

Вектор \vec{E} во всех точках поля направлен по радиусу, так как поле бесконечно длинного проводника симметрично относительно заряженной оси.

Вектор элементарной площадки \vec{dS} всегда направлен по нормали к поверхности, поэтому на боковой поверхности цилиндра векторы \vec{E} и $\vec{dS}_{\text{бок}}$ по направлению совпадают, а на основаниях цилиндра векторы \vec{E} и $\vec{dS}_{\text{осн}}$ взаимно перпендикулярны. На боковой поверхности цилиндра величина \vec{E} во всех точках одинакова.

Применим к цилиндрической поверхности теорему Гаусса и преобразуем левую часть этой теоремы.

$$\begin{aligned}
\oint_S \vec{E} d\vec{S} &= \int_{S_{\text{бок}}} E dS_{\text{бок}} \cos 0^\circ + 2 \int_{S_{\text{осн}}} E dS_{\text{осн}} \cos 90^\circ = \\
&= \int_{S_{\text{бок}}} E dS_{\text{бок}} = E \int_{S_{\text{бок}}} dS_{\text{бок}} = E S_{\text{бок}} = E 2\pi r l.
\end{aligned}
\tag{1.25}$$

Полный заряд, заключенный внутри цилиндрической поверхности, который нужно поставить в правой части теоремы Гаусса, равен заряду, расположенному на отрезке оси длиной l : $Q_0 = \tau l$.

Таким образом, выражение теоремы Гаусса приобретает следующий вид:

$$E \cdot 2\pi r l = \tau \cdot l / \epsilon_a.$$

Отсюда

$$E = \tau / (2\pi \epsilon_a r). \tag{1.26}$$

Картина поля уединенной электрической оси изображена на рисунке 1.21.

Найдем потенциал точки A , воспользовавшись определением потенциала:

$$\varphi_A = \int_A^P \vec{E} d\vec{l}, \quad \varphi_P = 0.$$

Очевидно, следует интегрировать вдоль радиуса, поскольку вектор \vec{E} также направлен по радиусу, при этом $d\vec{l} = dr$, однако, фиксированную точку P с нулевым потенциалом нельзя отнести в бесконечность, поскольку это приведет к неопределенному значению $\ln r$.

$$\varphi_A = \int_A^P \vec{E} d\vec{l} = \int_r^{r_p} E dr = \tau / (2\pi \epsilon_a) \cdot \int_r^{r_p} (dr/r) = \left[\tau / (2\pi \epsilon_a) \right] \cdot \ln(r_p/r). \tag{1.27}$$

Таким образом, потенциал точки поля уединенной электрической оси найден с точностью до потенциала фиксированной точки P .

1.12. Электрическое поле двух параллельных разноименных электрических осей

Электрическое поле двух параллельных электрических осей, заряженных равномерно зарядами противоположного знака, также будет плоскопараллельным, то есть не будет зависеть от координаты z , если ось z парал-

лельна электрическим осям, а будет зависеть только от координат x и y на плоскости. Но картина поля более сложная, чем для одной оси.

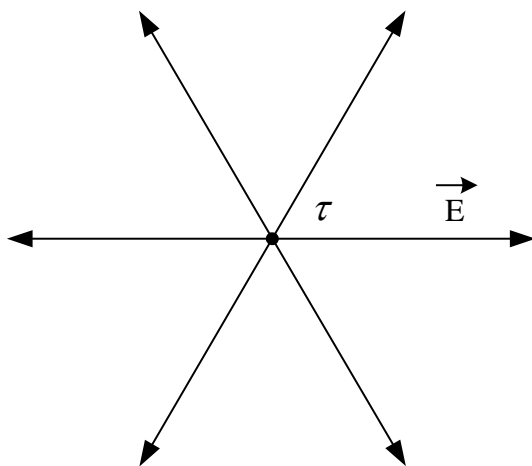


Рисунок 1.21

Напряженность электрического поля в любой точке A с координатами x, y может быть найдена как геометрическая сумма напряженностей, создаваемых каждой из электрических осей (рис. 1.22).

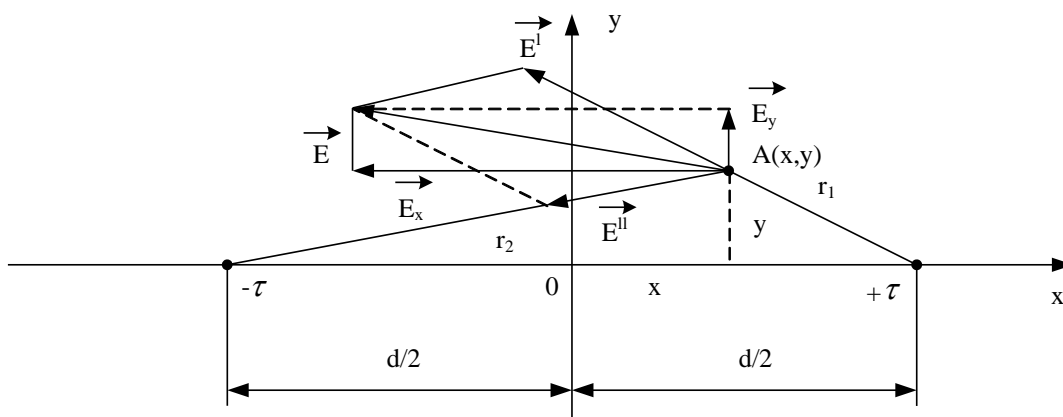


Рисунок 1.22

Напряженность \vec{E}' , создаваемая осью $+\tau$, направлена от этой оси, а напряженность \vec{E}'' , создаваемая осью $-\tau$, направлена к отрицательной оси, так как направление напряженности совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд, помещенный в данную точку, который

от $+\tau$ отталкивается, а к $-\tau$ притягивается. По абсолютной величине $E'=\tau/(2\pi\epsilon_a r_1)$, $E''=\tau/(2\pi\epsilon_a r_2)$, но суммировать их можно только геометрически:

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''.$$

При геометрическом суммировании трудно найти выражение напряженности в произвольной точке, поэтому поступают иначе. Найдем сначала выражение потенциала точки A , как алгебраическую сумму потенциалов, создаваемых каждой из электрических осей (потенциал – скалярная величина):

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi' + \varphi'' = [\tau/(2\pi\epsilon_a)] \cdot \ln(r_{p1}/r_1) + [(-\tau)/(2\pi\epsilon_a)] \cdot \ln(r_{p2}/r_2) = \\ &= [\tau/(2\pi\epsilon_a)] (\ln r_{p1} - \ln r_1 - \ln r_{p2} + \ln r_2) = [\tau/(2\pi\epsilon_a)] [\ln(r_2/r_1) + \ln(r_{p1}/r_{p2})],\end{aligned}$$

где r_{p1} , r_{p2} – расстояния от оси до фиксированной точки P , в которой $\varphi_p = 0$.

Расположим точку P на плоскости симметрии, проходящей через ось Y перпендикулярно плоскости чертежа, тогда $r_{p1} = r_{p2}$ и $\ln(r_{p1}/r_{p2}) = 0$.

Выражение потенциала примет следующий вид:

$$\varphi = [\tau/(2\pi\epsilon_a)] \cdot \ln(r_2/r_1). \quad (1.28)$$

Поскольку, $r_2 = \sqrt{(d/2 + x)^2 + y^2}$, $r_1 = \sqrt{(d/2 - x)^2 + y^2}$, то мы имеем $\varphi = f(x, y)$.

Воспользуемся дифференциальной связью $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$.

$$E_x = -\partial\varphi/\partial x; \quad E_y = -\partial\varphi/\partial y; \quad \vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y; \quad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

Таким образом, можно найти величину и направление \vec{E} в каждой точке поля.

Исследуем выражение потенциала и изобразим полную картину поля двух осей.

$\varphi = 0$ при $r_2 = r_1$, то есть, уравнением нулевой эквипотенциальной поверхности является плоскость симметрии yOz .

Уравнением других эквипотенциальных поверхностей служит уравнение $r_2/r_1 = \text{const}$. Можно доказать, что это уравнение окружности, центр которой лежит на линии, соединяющей электрические оси, но не совпадает с осями. Координата центра окружности $|x_{ц}| > d/2$. Чем меньше $|\varphi|$, тем больше $|x_{ц}|$.

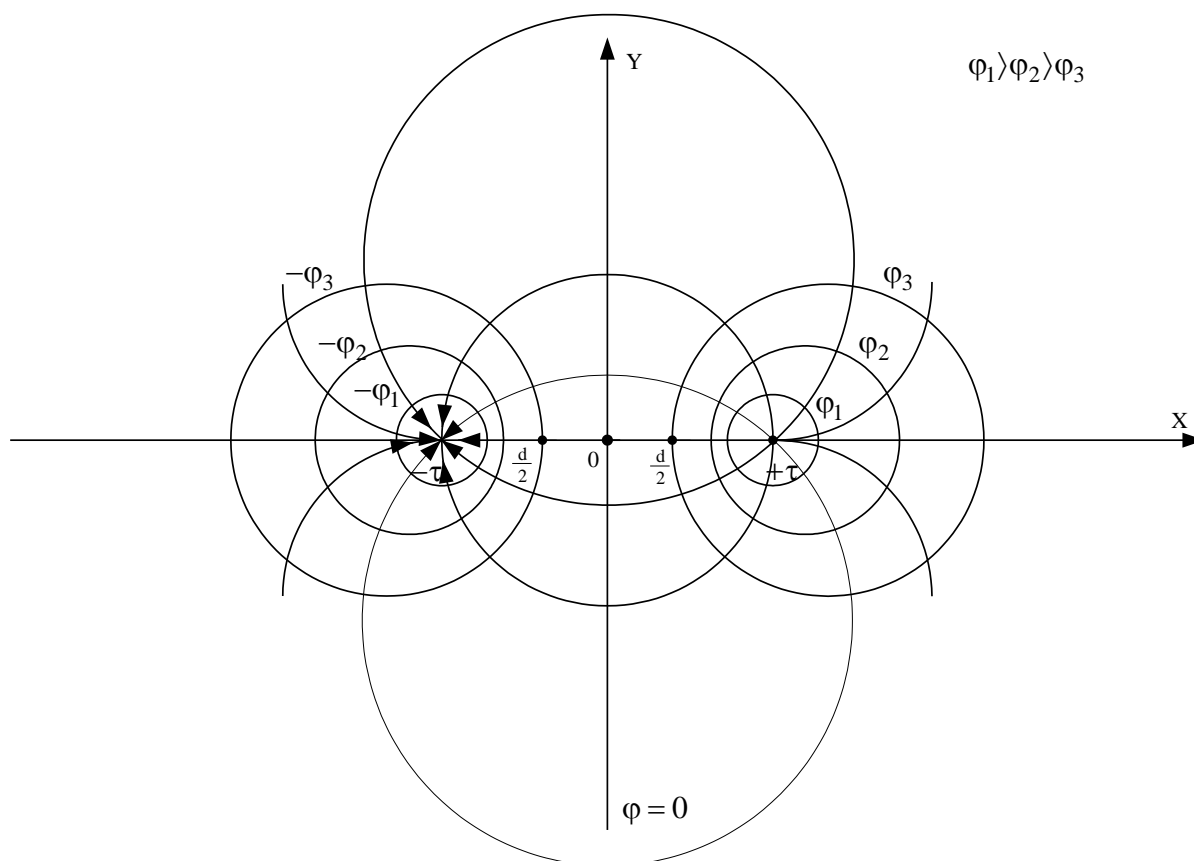


Рисунок 1.23

При $|x_{ц}| \rightarrow \infty$ окружность вырождается в прямую - ось Y , $\varphi \rightarrow 0$.

В пространстве эквипотенциальные поверхности являются цилиндрами, оси которых параллельны электрическим осям.

Можно доказать также, что силовые линии этого поля представляют собою окружности, центры которых лежат на оси Y .

Если одну или две эквипотенциальных поверхности заменить металлическими поверхностями, то поле вне этих поверхностей не изменится.

Поэтому поле двух параллельных разноименных цилиндрических проводников рассчитывается так же, как и поле двух осей.

1.13. Граничные условия в электрическом поле

1) Поле внутри проводящего тела в условиях электростатики

Если проводящее тело поместить в электрическое поле, то в нем произойдет разделение свободных зарядов, называемое электростатической индукцией: положительные заряды сместятся в направлении поля, а отрицательные – против поля. При этом поле, созданное индуцированными зарядами, внутри проводника будет направлено против внешнего поля и скомпенсировано им.

пенсирует его. В результате внутри проводника $E_{\text{пр}}=0$ в условиях электростатики. Иначе свободные заряды пришли бы в движение и нарушились бы условия электростатики.

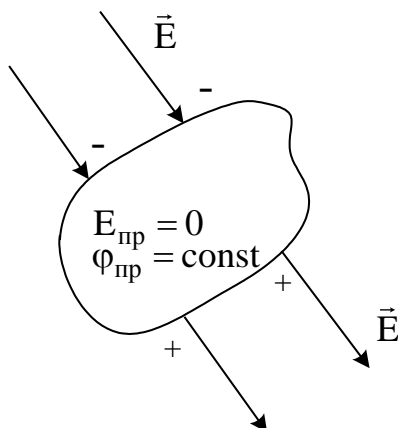


Рисунок 1.24

Вследствие этого напряжение между любыми двумя точками проводника $U_{\text{пр}} = \int \vec{E} d\vec{l} = 0$, то есть, потенциалы любых точек в проводнике одинаковы:

$$\varphi_{\text{пр}} = \text{const.} \quad (1.29)$$

Таким образом, все пространство внутри проводящего тела и его поверхность в условиях электростатики являются эквипотенциальными.

2) Условия на границе диэлектрика и проводника

а) Предположим, что на границе диэлектрика и проводника напряженность поля направлена под некоторым углом к границе раздела, то есть имеет две составляющих: тангенциальную E_{τ} , направленную вдоль границы, и нормальную E_n , направленную перпендикулярно границе.

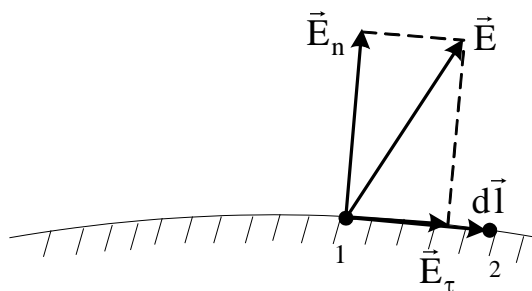


Рисунок 1.25

Возьмем любые две точки на границе раздела 1 и 2. С одной стороны, на поверхности проводника $\varphi_1 = \varphi_2$. С другой стороны, $\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} = E_\tau \cdot dl = 0$.

Следовательно, у поверхности проводника отсутствует тангенциальная составляющая напряженности поля ($E_\tau = 0$), и напряженность поля в диэлектрике у границы проводника направлена по нормали к границе: $E = E_n$. Следовательно, $D = D_n$, так как в однородной среде векторы \vec{D} и \vec{E} в каждой точке сонаправлены.

б) Рассмотрим еще раз границу проводника и диэлектрика в электростатическом поле. Учтем, что на поверхности проводника возникают индуцированные заряды с некоторой плотностью σ . На границе раздела выберем замкнутую поверхность в форме цилиндра, причем $h \ll R$, но R – б. м. величина. Тогда $S_{\text{осн}} = \Delta S$ значительно больше боковой поверхности $S_{\text{бок}}$.

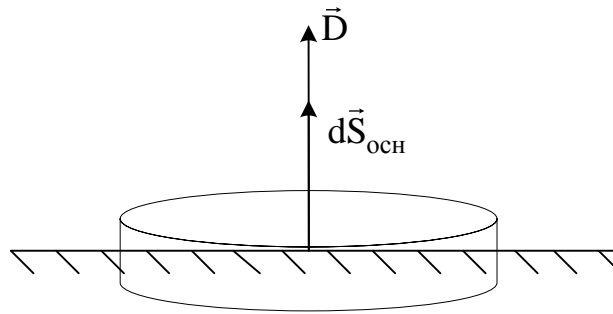


Рисунок 1.26

Применим к этой замкнутой поверхности теорему Гаусса:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_{S_{\text{осн пр}}} \vec{D}_{\text{пр}} d\vec{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{D} d\vec{S}_{\text{бок}} + \int_{S_{\text{осн диэл}}} \vec{D} d\vec{S}_{\text{осн}} = \int_{S_{\text{осн диэл}}} D dS_{\text{осн}} = D \Delta S = \sigma \Delta S,$$

откуда

$$D = \sigma. \quad (1.30)$$

При интегрировании первый интеграл равен нулю, поскольку в проводнике $D_{\text{пр}} = 0$, вторым интегралом можно пренебречь, в третьем интеграле векторы \vec{D} и $d\vec{S}$ по направлению совпадают. Поскольку ΔS мало, то D можно вынести из-под знака интеграла, $\int_S dS_{\text{осн}} = \Delta S$. Заряд, заключенный внутри поверхности, равен заряду, индуцированному на площадке проводника ΔS .

Таким образом, у поверхности проводника вектор электрического смещения направлен по нормали к этой поверхности и равен плотности зарядов на проводнике.

3) Условия на границе двух диэлектриков

а) Будем характеризовать поле в диэлектриках векторами напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}_2 под углами α_1 и α_2 к нормали.

Выберем вблизи границы замкнутый контур $abcd$, причем $ab=cd=\Delta l$ – б. м. величина, а $bc=da \ll \Delta l$ (рис. 1.27)

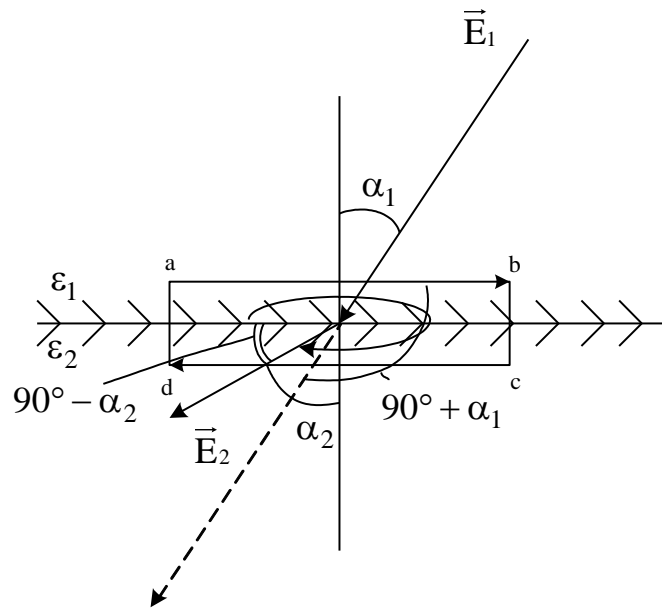


Рисунок 1.27

Применим к этому контуру условие потенциальности $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$.

Направление обхода контура – по часовой стрелке.

На участке ab угол между \vec{E}_1 и $d\vec{l}$ равен $90^\circ + \alpha_1$, на участке cd угол между \vec{E}_2 и $d\vec{l}$ равен $90^\circ - \alpha_2$, Δl мало, и в его пределах величины E_1 , E_2 , α_1 , α_2 можно считать неизменными. Интегралами по сторонам bc и da пренебрежем. Тогда:

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{E} d\vec{l} &= \int_a^b \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} d\vec{l} + \int_c^d \vec{E}_2 d\vec{l} + \int_d^a \vec{E} d\vec{l} = \\ &= \int_a^b E_1 dl \cos(90^\circ + \alpha_1) + \int_c^d E_2 dl \cos(90^\circ - \alpha_2) = -E_1 \sin \alpha_1 \Delta l + E_2 \sin \alpha_2 \Delta l = 0. \end{aligned}$$

Сокращая на Δl , получим первое граничное условие:

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2. \quad (1.31)$$

Иначе

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}. \quad (1.31a)$$

На границе раздела двух диэлектриков непрерывны тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля.

б) Будем характеризовать поле в каждом диэлектрике векторами электрического смещения \vec{D}_1 и \vec{D}_2 под теми же углами α_1 и α_2 к нормальям.

Выберем вблизи границы замкнутую поверхность в форме цилиндра, у которого $S_{\text{осн}} = \Delta S \gg S_{\text{бок}}$, причем ΔS – б.м. величина (рис. 1.28).

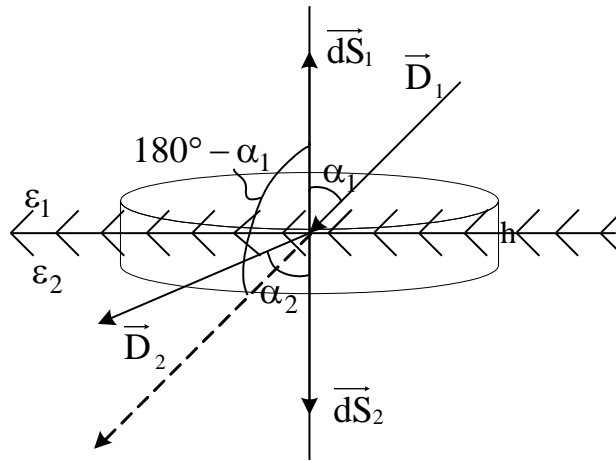


Рисунок 1.28

Применим к замкнутой поверхности теорему Гаусса. При интегрировании интегралом по боковой поверхности цилиндра пренебрежем, в пределах оснований D_1 , D_2 , α_1 , α_2 можно считать неизменными. Угол между \vec{D}_1 и $d\vec{S}_1$ равен $180^\circ - \alpha_1$, угол между \vec{D}_2 и $d\vec{S}_2$ равен α_2 . $d\vec{S}_1$ и $d\vec{S}_2$ направлены по наружной нормали к соответствующим основаниям. Свободного заряда внутри этой поверхности нет, поэтому правая часть теоремы Гаусса равна нулю.

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \int_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S}_1 + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{D} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S}_2 = \\ &= D_1 \cos(180^\circ - \alpha_1) \Delta S + D_2 \cos \alpha_2 \Delta S = (-D_1 \cos \alpha_1 + D_2 \cos \alpha_2) \Delta S = 0. \end{aligned}$$

Сокращая на ΔS , получим:

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2. \quad (1.32)$$

Иначе:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (1.32a)$$

На границе раздела двух диэлектриков непрерывны нормальные составляющие вектора электрического смещения.

Покажем, что изменение угла α при переходе поля из одного диэлектрика в другой обусловлено изменением проницаемости среды. Для этого разделим (1.32) на (1.31) и учтем, что $D_1 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_1$ и $D_2 = \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_2$.

Тогда получим:

$$\varepsilon_1 / \varepsilon_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 / \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (1.33)$$

Во всех случаях на границе раздела двух сред сохраняется непрерывность потенциала. Это обусловлено тем, что потенциал численно равен работе по перемещению единичного заряда, и на бесконечно малом пути при переходе через границу, нельзя совершить конечную работу. Поэтому потенциал при переходе через границу не изменяется скачком, сохраняет непрерывность.

1.14. Электрическая емкость и методика ее определения

Рассмотрим два проводящих тела, расположенных в диэлектрике и заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами. Потенциалы проводящих тел φ_1 и φ_2 . Такая система называется конденсатором (рис. 1.29).

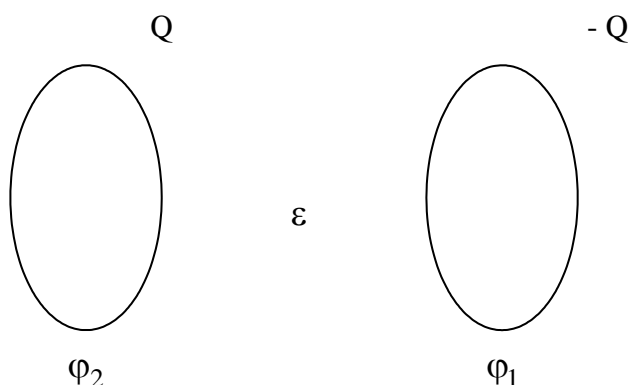


Рисунок 1.29

Она обладает емкостью $C = Q/(\varphi_1 - \varphi_2) = Q/U$. Электрической емкостью называется физическая величина, характеризующая способность конденса-

ра накапливать электрический заряд при заданном напряжении. Емкость измеряется в фарадах: $[C]=\text{Кл}/\text{В}=\text{Ф}$.

При отсутствии нелинейных сред (сегнетодиэлектриков, у которых ε зависит от E) емкость не зависит ни от заряда, ни от напряжения, а является лишь коэффициентом пропорциональности между ними.

Емкость зависит от формы и размеров проводников, их взаимного расположения и диэлектрической проницаемости среды.

При расчете емкости можно произвольно задаваться величиной заряда и использовать такой порядок расчета:

$$Q \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow U \rightarrow C.$$

Рассмотрим простейшие примеры:

1) Плоский конденсатор

Он состоит из двух плоских пластин (обкладок), размеры которых велики по сравнению с расстоянием между ними (рис. 1.30). В этом случае поле между обкладками можно считать однородным, если пренебречь искажением поля у краёв обкладок (краевым эффектом).

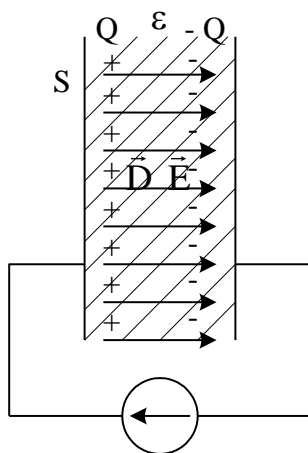


Рисунок 1.30

Задаёмся зарядом Q . Плотность заряда на обкладках конденсатора

$$\frac{Q}{S} = \sigma = D.$$

Напряженность поля $E = \frac{D}{\varepsilon \varepsilon_0}.$

Напряжение $U = \int \vec{E} d\vec{l} = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$.

Ёмкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \quad (1.34)$$

2) Цилиндрический конденсатор

Его обкладки представляют собой коаксиальные металлические цилиндры. Считая длину l значительно больше радиусов обкладок, пренебрежём краевым эффектом (рис. 1.31).

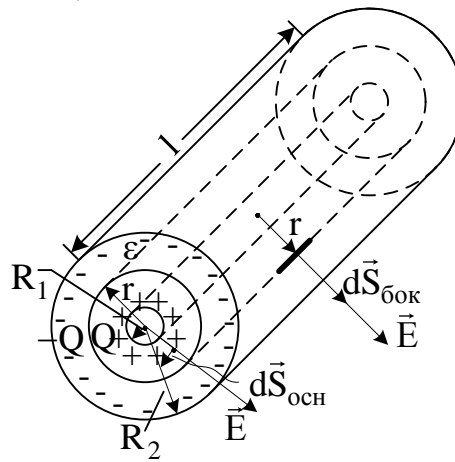


Рисунок 1.31

Задаемся зарядом Q и рассчитываем симметричное поле с помощью теоремы Гаусса. Для этой цели выбираем цилиндрическую поверхность радиуса r . Она состоит из двух оснований, на которых векторы \vec{E} и $d\vec{S}_{\text{осн}}$ взаимно перпендикулярны, и боковой поверхности, на которой векторы \vec{E} и $d\vec{S}_{\text{бок}}$ сонаправлены. Векторы \vec{D} и \vec{E} направлены одинаково:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 2 \int_{S_{\text{осн}}} D dS_{\text{осн}} \cos 90^\circ + \int_{S_{\text{бок}}} D dS_{\text{бок}} \cos 0^\circ = D \int_{S_{\text{бок}}} dS_{\text{бок}} = D 2\pi r l = Q.$$

Отсюда:

$$D = \frac{Q}{2\pi r l} \text{ и } E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l r}.$$

При определении напряжения интегрируем вдоль радиуса, чтобы векторы \vec{E} и $d\vec{l}$ совпадали по направлению.

$$U = \int \vec{E} d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Ёмкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (1.35)$$

1.15. Энергия электростатического поля

Можно доказать, что система заряженных проводящих тел с зарядами Q_k и потенциалами ϕ_k в своём электростатическом поле накапливает энергию:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k \phi_k. \quad (1.36)$$

В частности, для конденсатора $Q_1 = Q$; $Q_2 = -Q$.

$$W_e = \frac{1}{2} Q(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} QU = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \quad (1.37)$$

Найдём другое выражение энергии, которое доказывает, что энергия распределена во всем объёме, занятом полем.

Для этого запишем энергию электростатического поля плоского конденсатора и преобразуем это выражение:

$$W_e = C \frac{U^2}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S U^2}{2d} \frac{d}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S d E^2}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V.$$

Здесь учтено, что поле однородно и $E = \frac{U}{d}$; $V = Sd$.

Найдём энергию, заключенную в единице объёма:

$$w'_e = \frac{W_e}{V} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2}. \quad (1.38)$$

Эта величина называется объёмной плотностью энергии. В общем случае, для неоднородного поля:

$$W_e = \int_V w'_e dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{D}\vec{E} dV. \quad (1.39)$$

2. Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде. (Стационарное электрическое поле)

Если создать электрическое поле в проводящей среде, то свободные заряды придут в движение. Упорядоченное движение свободных зарядов под действием электрического поля называют током проводимости.

Величина, характеризующая способность среды проводить электрический ток, называется удельной проводимостью $\gamma [См/м]$.

2.1. Ток проводимости и его плотность

Основной величиной, определяющей электрический ток в каждой точке пространства, является плотность тока $\vec{\delta}$ (другое обозначение - \vec{j}).

Если эта величина в каждой точке не зависит от времени, то такой ток проводимости называется постоянным, а создаваемое им электрическое поле – стационарным.

Величина плотности тока численно равна пределу отношения тока Δi , проходящего через площадку ΔS , к величине ΔS при условии, что эта площадка перпендикулярна вектору напряжённости \vec{E} в данной точке, а величина $\Delta S \rightarrow 0$:

$$\delta = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta S \perp E}} \frac{\Delta i}{\Delta S} = \frac{di}{dS}. \quad (2.1)$$

Если элементарная площадка расположена произвольно, то

$$di = \vec{\delta} d\vec{S},$$

а направление вектора $\vec{\delta}$ совпадает с направлением движения положительных зарядов в данной точке.

Ток, проходящий через поверхность S , определяется следующим образом:

$$I = \int_S \vec{\delta} d\vec{S}. \quad (2.2)$$

Таким образом, ток – это поток вектора плотности тока сквозь сечение S . Постоянный ток обозначают I .

При протекании постоянного тока как внутри проводящих тел, так и в окружающем их диэлектрике создаётся магнитное поле. Однако, поскольку эти магнитные поля неизменны во времени, то в них не возникает явление электромагнитной индукции, а, следовательно, магнитное поле постоянного

тока не влияет на его электрическое поле, и эти поля можно рассматривать раздельно.

2.2. Основные законы стационарного электрического поля

1) Закон Ома для пассивного участка в дифференциальной и интегральной форме

Между плотностью тока и напряжённостью электрического поля в проводящей среде вне источников существует пропорциональная зависимость: $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$, известная из курса физики и называемая законом Ома в дифференциальной форме.

Рассмотрим часть проводящей среды (рис. 2.1).

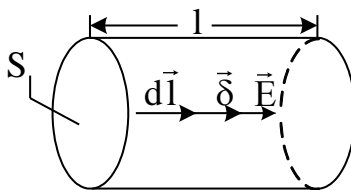


Рисунок 2.1

Выразим напряжение, приложенное к участку, а затем умножим и разделим на величину тока.

$$U = \int_l \vec{E} d\vec{l} = \int_l \frac{\vec{\delta} d\vec{l}}{\gamma} = I \int_l \frac{\vec{\delta}}{I} \cdot \frac{d\vec{l}}{\gamma}.$$

Отношение $\frac{\vec{\delta}}{I}$ не зависит от тока, а зависит лишь от формы и размеров проводника. Если направления $\vec{\delta}$ и $d\vec{l}$ совпадают и величина δ одинакова во всех точках поперечного сечения, то $\frac{\delta}{I} = \frac{1}{S}$ и $U = I \int_l \frac{dl}{\gamma S}.$

Величина

$$R = \int_l \frac{dl}{\gamma S}, \quad (2.3)$$

называется сопротивлением проводника. Если поперечное сечение постоянно:

$$R = \frac{l}{\gamma S}. \quad (2.3a)$$

Мы получили закон Ома в интегральной форме, поскольку все входящие в него величины (U , I , R) являются интегральными: $U = IR$ или $I = \frac{U}{R}$.

2) Второй закон Кирхгофа в дифференциальной и интегральной форме

Для длительного протекания тока электрическая цепь должна быть замкнута и в ней должны быть источники электрической энергии (рис. 2.2). Они представляют собой устройства, в которых под действием сил не электростатической природы (сторонних сил) происходит разделение зарядов. Внутри источника существуют два вида напряженностей поля: напряжённость электростатического поля \vec{E} и напряжённость сторонних сил $\vec{E}_{\text{стор}}$. Пока электрическая цепь не замкнута, эти напряженности уравнивают друг друга: $\vec{E} = \vec{E}_{\text{стор}}$. При замыкании цепи сторонние силы обуславливают непрерывное движение зарядов в цепи; при этом $\vec{E} < \vec{E}_{\text{стор}}$ внутри источника.

Выражение $\vec{\delta} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$ называют вторым законом Кирхгофа в дифференциальной форме. Разделим обе части на γ и возьмём интеграл по замкнутому контуру:

$$\oint_l \frac{\vec{\delta}}{\gamma} d\vec{l} = \oint_l \vec{E} d\vec{l} + \oint_l \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}.$$

Рассмотрим каждый интеграл:

$$\oint_l \frac{\vec{\delta}}{\gamma} d\vec{l} = I \oint_l \frac{\vec{\delta}}{I} \frac{d\vec{l}}{\gamma} = I(R + R_0),$$

где R – сопротивление внешней цепи; R_0 – внутреннее сопротивление источника; $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$ в силу потенциальности стационарного электрического поля.

$$\oint_l \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = \varepsilon - \text{электродвижущая сила.}$$

Электродвижущей силой называется физическая величина, численно равная работе сторонних сил по перемещению положительного единичного точечного заряда внутри источника против сил электростатического поля. Таким образом: $I(R + R_0) = \varepsilon$. Это есть второй закон Кирхгофа для простейшей цепи в интегральной форме.

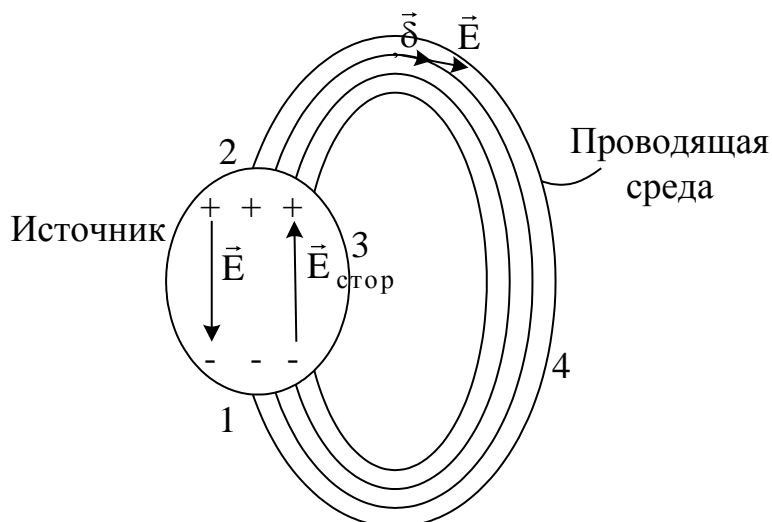


Рисунок 2.2

3) Первый закон Кирхгофа в интегральной форме

Если в проводящей среде выделить объём и ограничить его замкнутой поверхностью S , то при протекании постоянного тока в любой момент времени количество зарядов, входящих внутрь поверхности, равно количеству зарядов, выходящих из неё. Математически это записывается следующим образом:

$$\oint_S \vec{\delta} d\vec{S} = 0. \quad (2.4)$$

Это уравнение называется принципом непрерывности линий тока. Из него вытекает привычная форма записи I закона Кирхгофа. Покажем это. Рассмотрим узел электрической цепи, ограниченный замкнутой поверхностью S (рис. 2.3).

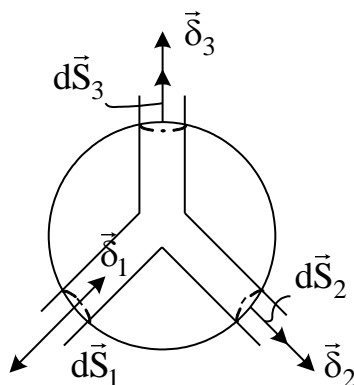


Рисунок 2.3

$$\oint_S \vec{\delta} d\vec{S} = \int_S \delta_1 dS_1 \cos 180^\circ + \int_{S_2} \delta_2 dS_2 + \int_{S_3} \delta_3 dS_3 = -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Ток I_1 получился со знаком «-», т.к. он входит внутрь поверхности, а $\vec{\delta}_1$ и $d\vec{S}_1$ противоположны по направлению.

В узле электрической цепи алгебраическая сумма токов равна нулю. Токи, втекающие в узел, берутся со знаком «минус», а вытекающие из узла – со знаком «плюс».

4) Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме

Из курса физики известно, что при протекании постоянного тока по проводнику в нём выделяется в виде тепла мощность

$$P = RI^2.$$

Найдём мощность, выделяющуюся в единице объема:

$$p_{\text{оа}} = \frac{P}{V} = \frac{RI^2}{V} = \frac{l}{\gamma S} \frac{(\delta S)^2}{lS} = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma E^2.$$

Таким образом:

$$p_{\text{уд}} = \gamma E^2 = \frac{\delta^2}{\gamma}. \quad (2.5)$$

Это и есть закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

В общем случае мощность, выделяющаяся в виде тепла в проводнике, может быть рассчитана согласно выражению:

$$P = \int_V p_{\text{уд}} dV = \int_V \gamma E^2 dV. \quad (2.6)$$

2.3. Граничные условия для электрического поля в проводящей среде

Граничные условия выводятся аналогично условиям на границе двух диэлектриков в электростатике.

Рассмотрим границу двух проводящих сред (рис. 2.4 и 2.5).

1) На основании принципа потенциальности полей имеем:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = E_1 \Delta l \cos(90^\circ + \alpha_1) + E_2 \Delta l \cos(90^\circ - \alpha_1) = 0,$$

откуда: $E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2$ или

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (2.7)$$

На границе двух проводящих сред непрерывны тангенциальные составляющие вектора напряженности поля.

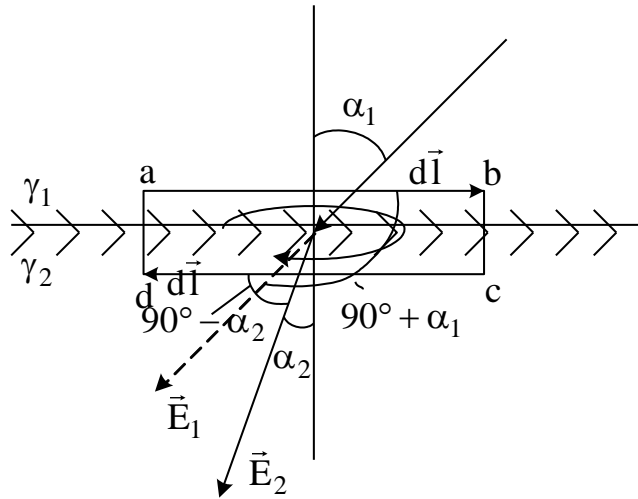


Рисунок 2.4

2) На основании принципа непрерывности линий тока

$$\oint_S \vec{\delta} d\vec{S} = \delta_1 \Delta S \cos(180^\circ - \alpha_1) + \delta_2 \Delta S \cos \alpha_2 = 0,$$

откуда $\delta_1 \cos \alpha_1 = \delta_2 \cos \alpha_2$ или

$$\delta_{1n} = \delta_{2n}. \quad (2.8)$$

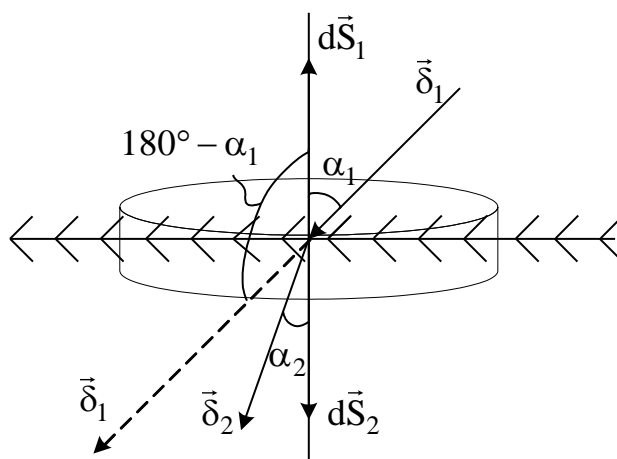


Рисунок 2.5

На границе двух проводящих сред непрерывны нормальные составляющие вектора плотности тока.

2.4. Формальная аналогия стационарного и электростатического полей

Хотя физическая природа этих полей различна, но между ними при определённых условиях существует математическая аналогия. Она имеет место между стационарным полем вне источников и электростатическим полем в областях, где нет свободных зарядов. Оба эти поля потенциальны, их картины при одинаковой форме граничных поверхностей идентичны.

Взаимно аналогичными являются величины γ и ϵ_a , $\vec{\delta}$ и \vec{D} , \vec{E} , φ .

Указанная аналогия широко используется при аналитическом решении задач и для физического моделирования полей. Стационарное поле довольно легко моделируется и поддаётся измерению, а результаты могут быть использованы для электростатического поля той же конфигурации.

2.5. Соотношение между сопротивлением и ёмкостью

Если какие-либо электроды поместить в проводящую среду, то при напряжении $U = \int_l \vec{E} d\vec{l}$ появится ток $I = \int_s \vec{\delta} d\vec{S} = \gamma \int_s \vec{E} d\vec{S}$.

Сопротивление проводящей среды:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_l \vec{E} d\vec{l}}{\gamma \int_s \vec{E} d\vec{S}}. \quad (2.9)$$

Если же электроды поместить в диэлектрик, то при напряжении $U = \int_l \vec{E} d\vec{l}$ на электродах появится заряд $Q = \int_S \vec{D} d\vec{S} = \epsilon_a \int_S \vec{E} d\vec{S}$.

Ёмкость системы:

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_a \frac{\int_S \vec{E} d\vec{S}}{\int_l \vec{E} d\vec{l}}. \quad (2.10)$$

Как было сказано выше, картины полей для вектора E идентичны. Найдём произведение R и C :

$$RC = \frac{\int_l \vec{E} d\vec{l}}{\int_S \vec{E} d\vec{S}} \frac{\epsilon_a}{\gamma} \cdot \frac{\int_S \vec{E} d\vec{S}}{\int_l \vec{E} d\vec{l}} = \frac{\epsilon_a}{\gamma} = \rho \epsilon_a, \quad (2.11)$$

где $\rho = \frac{1}{\gamma}$ - удельное сопротивление проводящей среды.

Это соотношение можно использовать для определения сопротивления изоляции кабеля.

Когда между жилой и оболочкой кабеля прикладывается напряжение U , то, кроме рабочего тока, протекающего по жиле к оболочке кабеля, в изоляции возникает ток утечки, обусловленный движением незначительного количества свободных зарядов, которые существуют в любом реальном диэлектрике. Сопротивление изоляции току утечки, линии которого радиальны, называют просто сопротивлением изоляции (рис. 2.6).

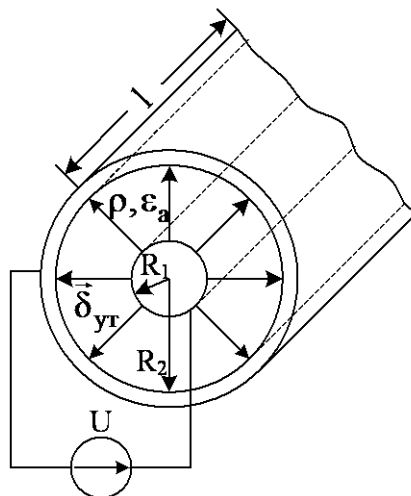


Рисунок 2.6

Формула для определения ёмкости кабеля (цилиндрического конденсатора) получена ранее: $C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$. Находим сопротивление изоляции из соотношения (2.11):

$$R_{\text{из}} = \frac{\rho\epsilon_a}{C} = \frac{\rho \ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi l}. \quad (2.12)$$

2.6. Методика расчёта сопротивлений

В линейных средах сопротивление не зависит от напряжения и тока, а лишь является коэффициентом пропорциональности между ними. Сопротивление зависит от формы и размеров проводника и свойств проводящей среды.

При расчёте сопротивлений можно произвольно задаваться током. Порядок расчёта следующий:

$$I \rightarrow \delta \rightarrow E \rightarrow U \rightarrow R = \frac{U}{I}.$$

В качестве примера рассмотрим сопротивление растеканию полусферического заземлителя (рис. 2.7).

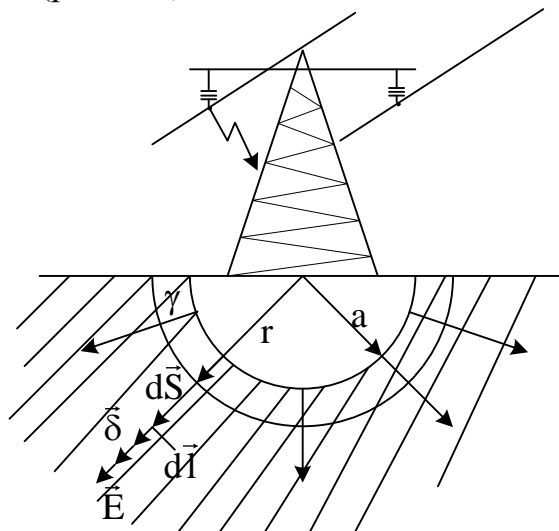


Рисунок 2.7

Каждая опора линии передачи закреплена в земле с помощью заземлителя. Если в аварийных условиях происходит пробой изоляции, то с заземлителя в грунт стекает ток короткого замыкания. Вторым электродом следует

считать заземлённую нейтраль генератора, расположенную теоретически бесконечно далеко, поэтому линии тока с поверхности заземлителя расходятся во все стороны равномерно. Величина плотности тока δ зависит только от радиуса, и в любой точке полусферы радиуса r она постоянна. Задавшись током короткого замыкания, определим плотность тока:

$$I_{\text{кз}} = \int_S \vec{\delta} d\vec{S} = \int_S \delta dS = \delta \int_S dS = \delta S = \delta 2\pi r^2; \quad \delta = \frac{I_{\text{кз}}}{2\pi r^2}.$$

Напряжённость поля: $E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I_{\text{кз}}}{2\pi\gamma r^2}.$

Напряжение между поверхностью заземлителя и бесконечно удаленной нейтралью генератора:

$$U = \int_l \vec{E} d\vec{l} = \int_a^\infty E dr = \frac{I_{\text{кз}}}{2\pi\gamma} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{I_{\text{кз}}}{2\pi\gamma a}.$$

Сопротивление растеканию:

$$R_{\text{раст}} = \frac{U}{I_{\text{кз}}} = \frac{1}{2\pi\gamma a}. \quad (2.12)$$

В тех случаях, когда длина линий тока различна, следует задаваться не током, а напряжением, и вести расчёт в следующем порядке:

$$U \rightarrow E \rightarrow \delta \rightarrow I \rightarrow R = \frac{U}{I}.$$

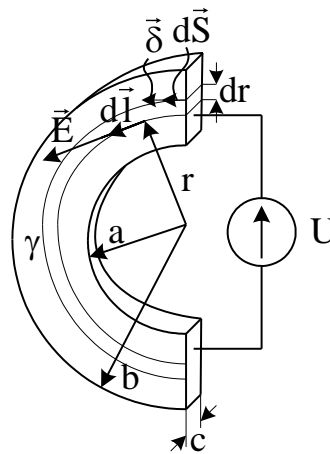


Рисунок 2.8

Найдём сопротивление подковообразной пластины (рис. 2.8). Зададимся напряжением между торцами пластины. Силовые линии представляют собой полуокружности.

$$U = \int_l \vec{E} d\vec{l} = El = E\pi r; \text{ тогда } E = \frac{U}{\pi r}.$$

Плотность тока $\delta = \gamma E = \frac{\gamma U}{\pi r}$. Ток, проходящий сквозь поперечное сечение пластины:

$$I = \int_s \vec{\delta} d\vec{S} = \int_s \delta dS = \int_a^b \frac{\gamma U}{\pi r} c dr = \frac{\gamma U c}{\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Сопротивление пластины:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\pi}{\gamma c \ln \frac{b}{a}}. \quad (2.13)$$

3. Магнитное поле постоянных токов

3.1. Основные величины, характеризующие магнитное поле в пространстве

Магнитное поле проявляет себя в силовом воздействии на движущиеся заряды и проводники с токами.

Сила $\Delta \vec{F}$, действующая на элемент проводника с током $I \Delta l$, определяется по закону Ампера:

$$\Delta \vec{F} = I [\Delta \vec{l}, \vec{B}]. \quad (3.1)$$

Величина \vec{B} называется индукцией магнитного поля и измеряется в теслах (Тл).

Если векторы $\Delta \vec{F}, \Delta \vec{l}, \vec{B}$ взаимно перпендикулярны, сила будет наибольшей возможной. Поэтому считают, что

$$B = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\max}}{I \Delta l}. \quad (3.2)$$

Направление силы, индукции и тока связаны правилом левой руки. Если силовые линии входят в ладонь и 4 пальца направлены по току, то большой палец показывает направление силы.

Второй величиной, характеризующей магнитное поле в любой точке пространства, является напряжённость магнитного поля \vec{H} . Она измеряется в амперах, делённых на метр (А/м) и в однородных средах совпадает с индукцией по направлению:

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (3.3)$$

Величина μ_a называется абсолютной магнитной проницаемостью среды и измеряется в генри, делённых на метр (Гн/м):

$$\mu_a = \mu \mu_0, \quad (3.4)$$

где μ – относительная магнитная проницаемость среды (безразмерная величина); μ_0 – магнитная постоянная: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (Гн/м). Для вакуума (и воздуха) $\mu=1$.

3.2. Основные уравнения магнитного поля в интегральной форме

1) Закон полного тока

Он известен из курса физики и записывается следующим образом:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I_0. \quad (3.5)$$

Циркуляция вектора напряжённости магнитного поля вдоль замкнутого контура равна полному току, сцеплённому с этим контуром.

Под полным током I_0 , сцепленным с контуром, понимают алгебраическую сумму токов, проходящих сквозь любую незамкнутую поверхность, ограниченную контуром интегрирования. Положительными считаются токи, направление которых связано с направлением обхода контура правилом правого винта: $I_0 = I_2 - I_1$ (рис. 3.1).

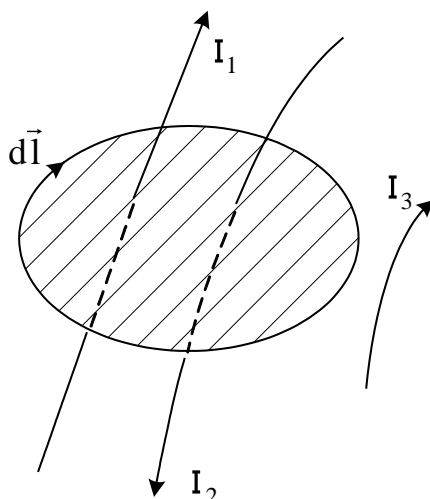


Рисунок 3.1

2) Принцип непрерывности линий магнитного поля

Магнитным потоком называется величина

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (3.6)$$

Поскольку силовые линии магнитного поля всегда замкнуты, то магнитный поток сквозь замкнутую поверхность всегда равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (3.7)$$

Это уравнение выражает принцип непрерывности линий магнитного поля в интегральной форме.

3.3. Граничные условия в магнитном поле

Они выводятся формально аналогично условиям на границе двух диэлектриков:

1) Применим закон полного тока к замкнутому контуру и учтем, что на границе сред токи отсутствуют (рис. 3.2)

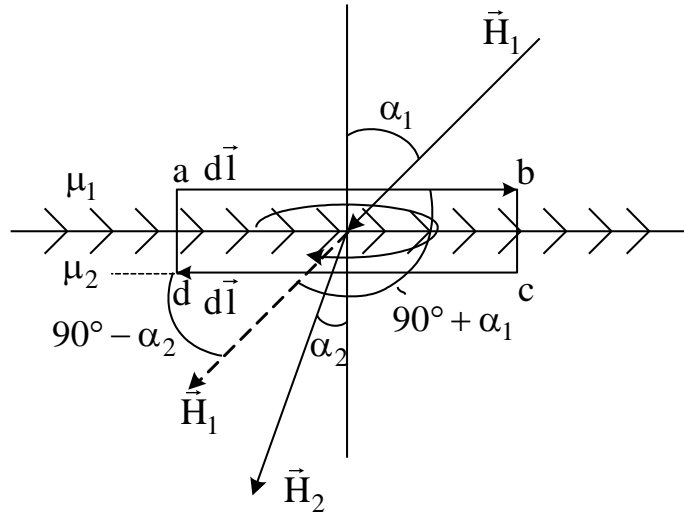


Рисунок 3.2

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = H_1 \Delta l \cos(90^\circ + \alpha_1) + H_2 \Delta l \cos(90^\circ - \alpha_2) = 0,$$

откуда

$$H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2, \quad (3.8)$$

$$\text{или } H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (3.8a)$$

На границе раздела двух сред непрерывна тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля.

2) Второе условие выводится на основании принципа непрерывности линий магнитного поля (3.7).

$$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = B_1 \Delta S \cos(180^\circ - \alpha_1) + B_2 \Delta S \cos \alpha_2 = 0,$$

$$\text{откуда } B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2, \quad (3.9)$$

$$\text{или } B_{1n} = B_{2n} \quad (3.9a)$$

На границе раздела двух сред непрерывна нормальная составляющая вектора индукции магнитного поля.

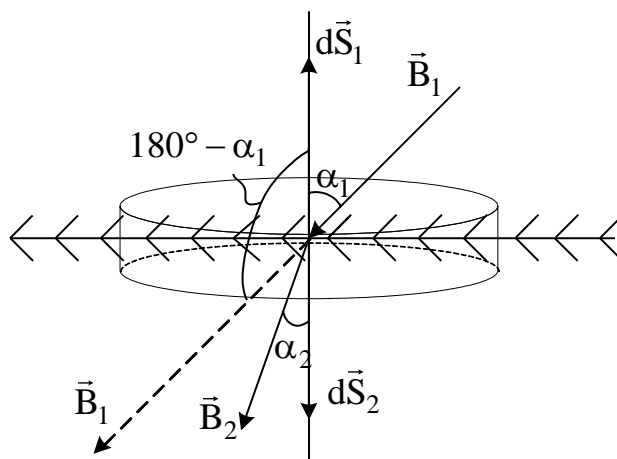


Рисунок 3.3

3.4. Методы расчета магнитного поля

1) Применение закона Био-Савара-Лапласа

Для проводников с токами, у которых поперечные размеры значительно меньше продольных, справедливо уравнение:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{[d\vec{l} \vec{r}^o]}{r^2}, \quad (3.10)$$

где $d\vec{l}$ - элемент контура с током и направлен по току; r - расстояние от $d\vec{l}$ до точки, в которой определяется B ; \vec{r}^o - единичный радиус - вектор, направленный от $d\vec{l}$ к точке наблюдения.

В качестве примера определим индукцию на оси кругового тока (рис. 3.4).

Каждая элементарная индукция $d\vec{B}$ направлена перпендикулярно плоскости, образованной $d\vec{l}$ и \vec{r}^o в ту сторону, куда ввинчивается правый винт, если его головку вращать от $d\vec{l}$ к \vec{r}^o через меньший угол (90°). Все векторы $d\vec{B}$ образуют коническую поверхность, и могут быть сложены геометрически попарно, причем составляющие dB_y и dB'_y компенсируются, а составляющие dB_x и dB'_x суммируются, образуя результирующую индукцию, направленную по оси витка.

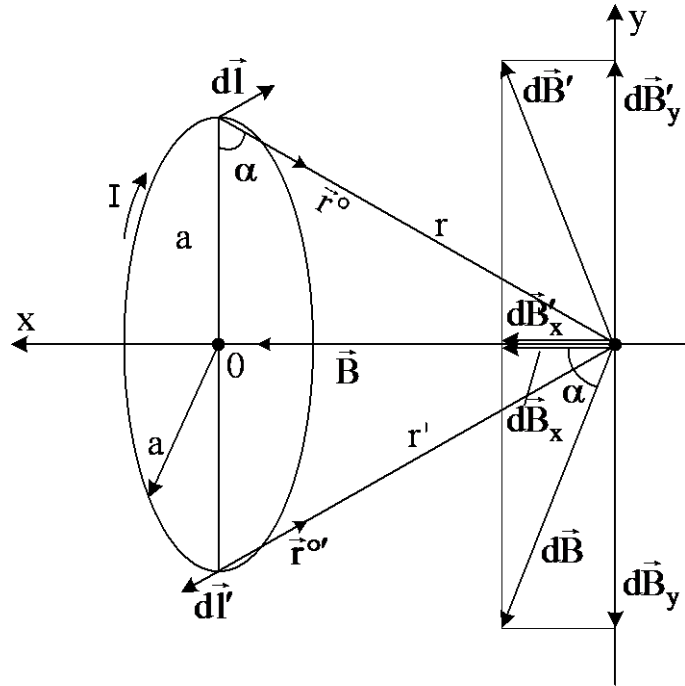


Рисунок 3.4

$$\begin{aligned}
 B &= \int dB_x = \int dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{dl \cdot l \cdot \sin 90^\circ}{r^2} \cos \alpha = \\
 &= \frac{\mu_0 I \cos \alpha}{4\pi r^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I \cos \alpha}{4\pi r^2} 2\pi a = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + d^2)^{3/2}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Здесь учтено, что $\cos \alpha = \frac{a}{r}$ и $r = \sqrt{a^2 + d^2}$. Индукцию в центре кольца получим при $d=0$:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2a}. \tag{3.11a}$$

2) Применение закона полного тока в интегральной форме

Хотя закон полного тока справедлив в любых магнитных полях и при произвольной форме замкнутого контура, воспользоваться им для расчета поля можно лишь в том случае, если магнитное поле симметрично. Тогда в нем можно выбрать замкнутый контур в виде окружности, являющейся силовой линией, в каждой точке которой \vec{H} и $d\vec{l}$ совпадают по направлению и величина H одинакова.

Этим условиям удовлетворяют поля бесконечно длинных проводников круглого сечения и поля тороидальных катушек.

Рассмотрим расчет магнитного поля внутри и вне бесконечно длинного проводника круглого сечения (рис. 3.5).

Внутри проводника, при $r \leq a$:

$$\oint_l \vec{H}_1 d\vec{l} = \oint_l H_1 dl = H_1 \oint_l dl = H_1 2\pi r = I_0 = \delta \cdot \pi r^2 = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r^2 ;$$

$$H_1 = \frac{Ir}{2\pi a^2} . \quad (3.12)$$

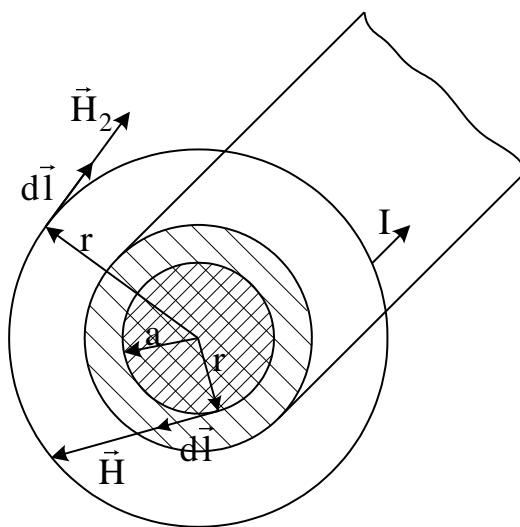


Рисунок 3.5

Внутри проводника напряженность растет линейно с увеличением r от 0 до a . Вне проводника, при $r \geq a$,

$$\oint_l \vec{H}_2 d\vec{l} = H_2 \cdot 2\pi r = I ,$$

откуда

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} . \quad (3.13)$$

Вне проводника напряженность убывает обратно пропорционально радиусу. На границе, при $r=a$, непрерывность напряженности на границе обусловлена ее направлением по касательной к границе.

График зависимости $H=f(r)$ представлен на рис. 3.6.

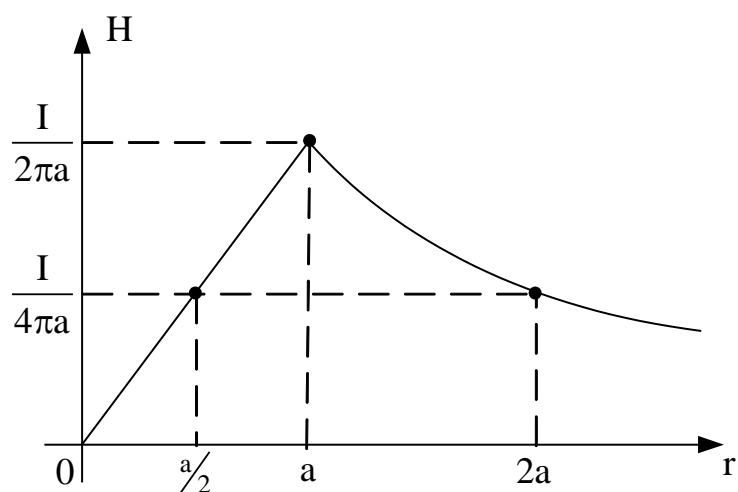


Рисунок 3.6

3.5. Магнитный поток и магнитное потокоосцепление

Электрический ток, проходя по контуру, создает сцепленный с ним магнитный поток (рис. 3.7).

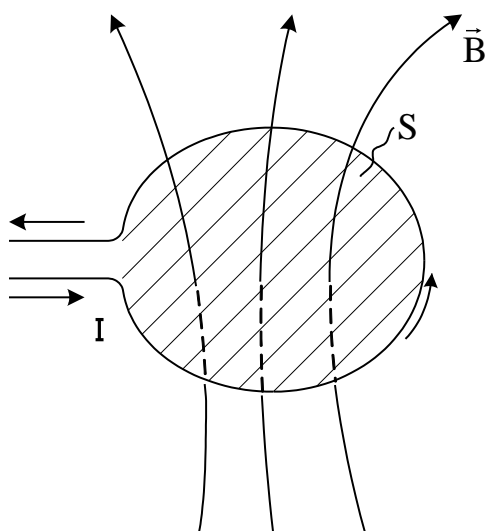


Рисунок 3.7

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (3.14)$$

Если контур сложный, то каждая силовая линия магнитного поля может быть сцеплена с различным числом витков (рис. 3.8).

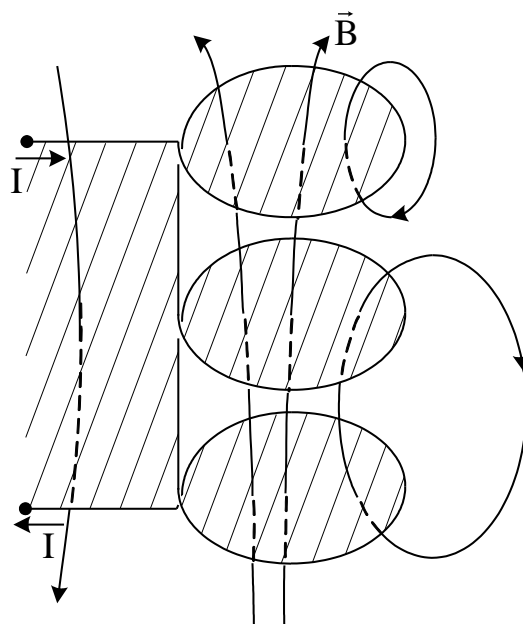


Рисунок 3.8

Потокосцеплением контура называется величина, равная сумме произведений магнитных потоков на число витков, с которым сцепляется каждый поток:

$$\Psi = \sum \Phi_k w_k. \quad (3.15)$$

Для одного витка из тонкого провода $w=1$ и $\Psi = \Phi$.

Для катушки, плотно навитой на сердечник (рис. 3.9),

$$\Psi = w\Phi. \quad (3.16)$$

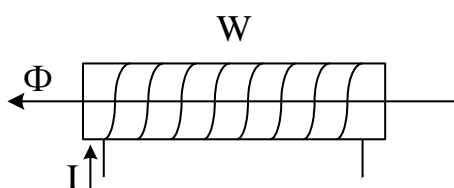


Рисунок 3.9

Если потокосцепление контура создано током только этого контура, оно называется потокосцеплением самоиндукции, обозначается Ψ_L и при отсутствии ферромагнитных сред прямо пропорционально току:

$$\Psi_L = LI. \quad (3.17)$$

Коэффициент пропорциональности L измеряется в генри (Гн) и называется индуктивностью контура.

Более сложные соотношения имеют место в системе двух контуров. При их близком расположении они создают общее магнитное поле. Рассмотрим два одновитковых контура (рис. 3.10).

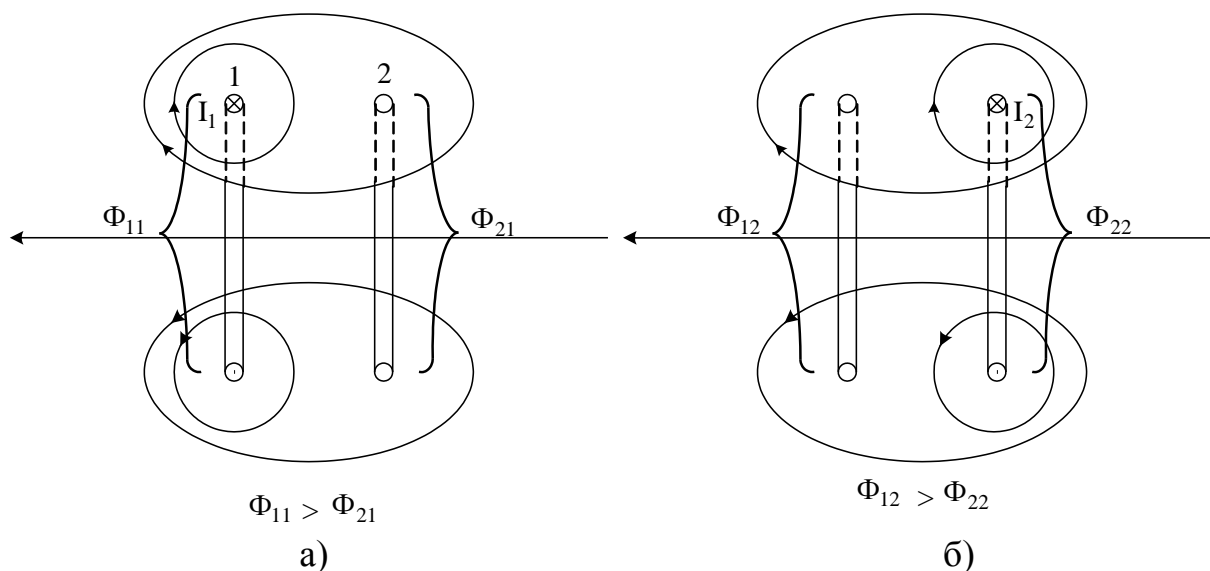


Рисунок 3.10

Если $I_1 \neq 0$, а $I_2 = 0$, то все линии магнитного поля сцепляются с первым контуром, образуя собственный магнитный поток Φ_{11} , и часть линий сцепляется со вторым контуром, образуя взаимный магнитный поток второго контура Φ_{21} (рис. 3.10а).

Если $I_1 = 0$, а $I_2 \neq 0$, то все линии магнитного поля сцеплены со вторым контуром, образуя его собственный магнитный поток Φ_{22} , и часть линий сцеплена с первым контуром, создавая его взаимный магнитный поток Φ_{12} (рис. 3.10б).

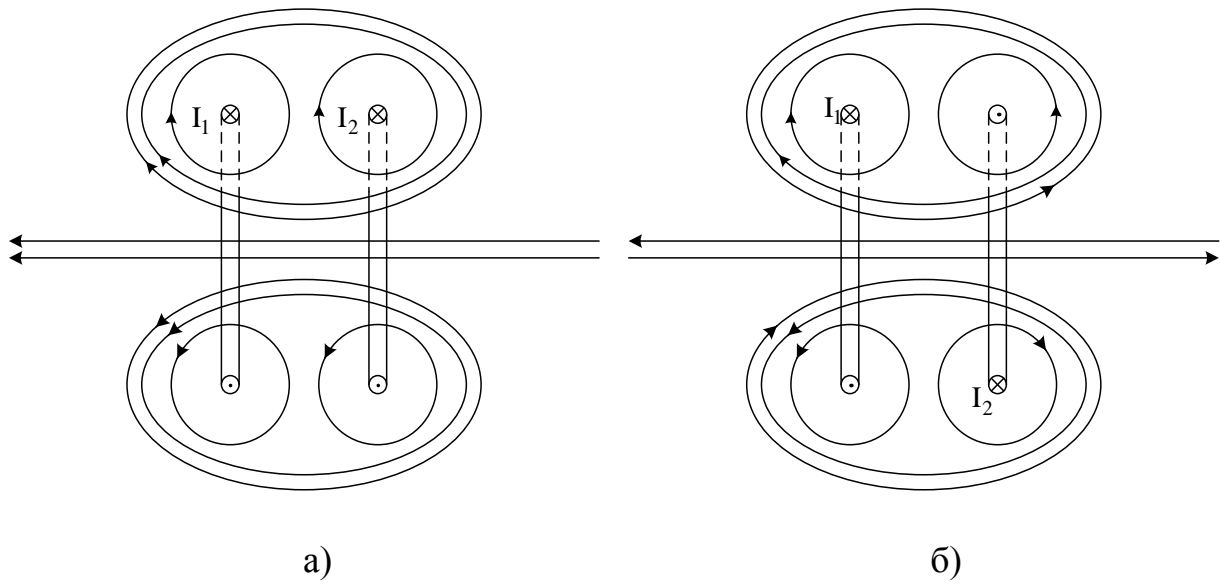


Рисунок 3.11

Если токи существуют в обоих контурах, то с каждым из них сцеплен и собственный, и взаимный магнитный поток (рис. 3.11). При этом возможны два случая.

1) В каждом контуре собственный и взаимный магнитные потоки складываются (рис. 3.11а):

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{12}; \\ \Phi_2 &= \Phi_{22} + \Phi_{21}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Такая магнитная связь называется согласной.

2) В каждом контуре собственный и взаимный магнитные потоки вычитаются (рис. 3.11б):

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{11} - \Phi_{12}; \\ \Phi_2 &= \Phi_{22} - \Phi_{21}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Такая магнитная связь называется встречной.

В общем случае:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{11} \pm \Phi_{12}; \\ \Phi_2 &= \Phi_{22} \pm \Phi_{21}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Если контуры более сложные и имеют много витков, то следует оперировать не потоками, а потокосцеплениями, но физическая сущность явлений не меняется:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 I_1 \pm M I_2; \\ \Psi_2 &= \Psi_{22} \pm \Psi_{21} = L_2 I_2 \pm M I_1,\end{aligned}\tag{3.21}$$

где L_1, L_2 - индуктивности соответствующих контуров, M – взаимная индуктивность двух контуров, также измеряемая в Генри (Гн).

Коэффициентом магнитной связи двух контуров называется величина

$$K_{\text{св}} = \sqrt{\frac{\Psi_{12} \cdot \Psi_{21}}{\Psi_{11} \cdot \Psi_{22}}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1. \quad (3.22)$$

3.6. Энергия магнитного поля

В магнитном поле накапливается энергия, которую можно вычислить различными способами. Рассмотрим два из них.

1) Можно доказать, что в магнитном поле системы контуров с токами I_k и потокоцеплениями Ψ_k накапливается энергия

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k. \quad (3.23)$$

В частности, для одного контура:

$$\Psi = LI \text{ и } W_m = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.24)$$

Для двух контуров, согласно (3.21): $\Psi_1 = L_1 I_1 \pm M I_2$; $\Psi_2 = L_2 I_2 \pm M I_1$.

Рассчитаем запас энергии магнитного поля системы двух контуров:

$$W_m = \frac{1}{2} (\Psi_1 I_1 + \Psi_2 I_2) = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} \pm M I_1 I_2. \quad (3.25)$$

Согласная магнитная связь увеличивает энергию магнитного поля, а встречная – уменьшает ее.

2) Выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие поле в каждой точке пространства.

Рассмотрим тороидальный сердечник, у которого внутренний и внешний диаметры отличаются незначительно. На сердечник равномерно и плотно намотана катушка с числом витков w и током I (рис. 3.12).

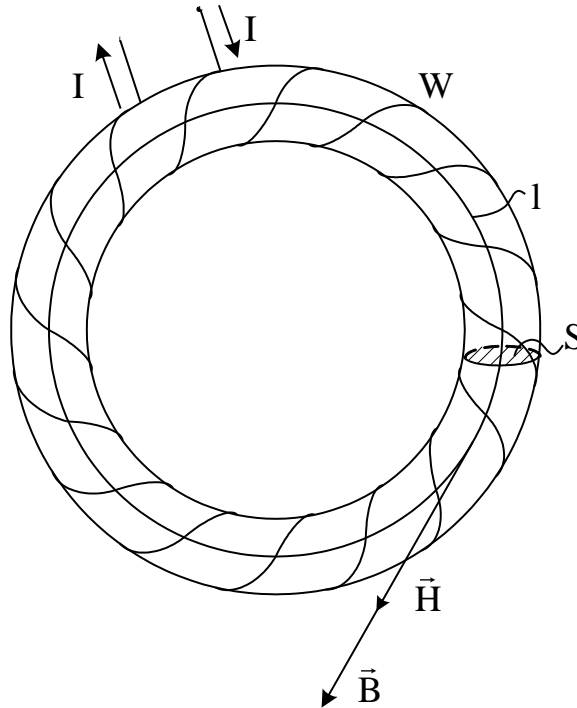


Рисунок 3.12

Для такого сердечника можно считать длину всех силовых линий одинаковой и равной l . По закону полного тока имеем: $Hl = Iw$, откуда $I = \frac{Hl}{w}$.

Магнитный поток $\Phi = BS$, а потокосцепление катушки $\Psi = w\Phi = wBS$. Запишем энергию магнитного поля, заключенного в сердечнике.

$$W_m = \frac{1}{2} \Psi I = \frac{1}{2} wBS \frac{Hl}{w} = \frac{1}{2} BHV,$$

где $V = lS$ - объем сердечника.

Найдем объемную плотность энергии:

$$w'_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (3.26)$$

В том случае, когда энергия неравномерно распределена в объеме, занятом магнитным полем, она может быть рассчитана следующим образом:

$$W_m = \int_V w'_m dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dV. \quad (3.27)$$

3.7. Методика расчета индуктивностей

Индуктивность контура определяет две важных физических величины – потокосцепление и энергию магнитного поля.

При отсутствии ферромагнитных (нелинейных) сред индуктивность не зависит от тока, а зависит от формы и размеров контура, числа его витков и магнитной проницаемости среды.

Если контур объемный, то индуктивность рассчитывается через внутреннюю энергию поля, а индуктивность контура из тонкого провода рассчитывается через потокосцепление.

Приведем примеры.

В обоих случаях током задаются произвольно.

1) Внутренняя индуктивность провода круглого сечения (рис. 3.13)

Порядок расчета: $I \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow W_m \rightarrow L = \frac{2W_m}{I^2}$.

Как было показано выше (3.12), напряженность магнитного поля в любой точке внутри провода определяется выражением:

$$H = \frac{Ir}{2\pi a^2}.$$

Индукция поля в той же точке

$$B = \frac{\mu\mu_0 Ir}{2\pi a^2},$$

где μ – относительная магнитная проницаемость материала провода.

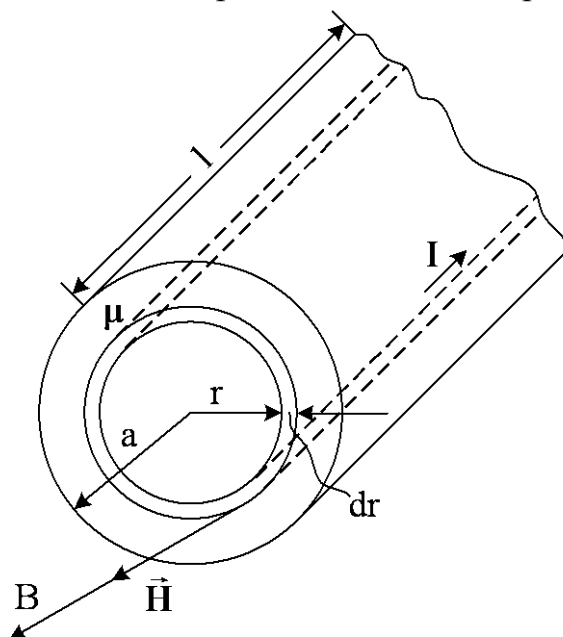


Рисунок 3.13

Выберем элементарный объем в виде трубки радиуса r , толщиной dr , длиной l : $dV = 2\pi r dr l$.

Найдем энергию магнитного поля, заключенную внутри провода согласно (3.27):

$$W_{m \text{ внутр}} = \frac{1}{2} \int_V B H dV = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\mu \mu_0 I^2 r^2}{4\pi^2 a^4} 2\pi r l dr = \frac{\mu \mu_0 I^2 l}{4\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu \mu_0 I^2 l}{4\pi a^4} \frac{a^4}{4} = \frac{\mu \mu_0 I^2 l}{16\pi}.$$

С другой стороны, $W_{m \text{ внутр}} = \frac{L_{\text{внутр}} I^2}{2}$. Поэтому:

$$L_{\text{внутр}} = \frac{2W_{m \text{ внутр}}}{I^2} = \frac{\mu \mu_0 l}{8\pi}. \quad (3.28)$$

2) Индуктивность тороидальной катушки (рис. 3.14)

Порядок расчета: $I \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow \Phi \rightarrow \Psi \rightarrow L$.

Задавшись током и считая, что витки катушки равномерно и плотно покрывают сердечник, выбираем силовую линию в виде окружности радиуса r и применяем к ней закон полного тока:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_l H dl = H \oint_l dl = H 2\pi r = I w.$$

Ток катушки сцеплен с контуром интегрирования w раз. Из закона полного тока имеем: $H = \frac{I w}{2\pi r}$.

Тогда индукция магнитного поля: $B = \frac{\mu \mu_0 I w}{2\pi r}$. Магнитный поток:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} B h dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu \mu_0 I w h}{2\pi r} dr = \frac{\mu \mu_0 I w h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Такой поток пронизывает каждый виток катушки, поэтому потокосцепление $\Psi = w\Phi = \frac{\mu \mu_0 I w^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

Индуктивность катушки

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu \mu_0 w^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (3.29)$$

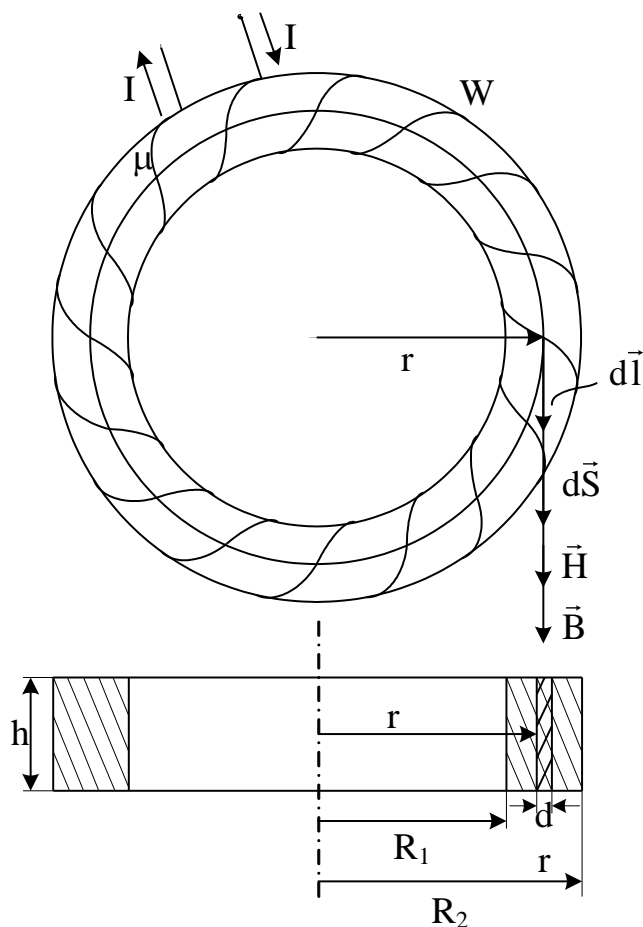


Рисунок 3.14

3.8. Методика расчета взаимной индуктивности

Взаимная индуктивность двух контуров при отсутствии ферромагнитных сред не зависит от токов контуров, а зависит от формы, размеров, взаимного расположения, чисел витков контуров и магнитной проницаемости среды. Теоретически возможны два пути расчета, при которых выбирается произвольно ток одного из контуров: $I_1 \rightarrow H_1 \rightarrow B_1 \rightarrow \Phi_{21} \rightarrow \Psi_{21} \rightarrow M = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$, или

$$I_2 \rightarrow H_2 \rightarrow B_2 \rightarrow \Phi_{12} \rightarrow \Psi_{12} \rightarrow M = \frac{\Psi_{12}}{I_2}.$$

На практике возможны случаи, когда оба пути равноценны по сложности. При этом контуры расположены симметрично, и поле каждого из них рассчитывается по закону полного тока.

Если же поле только одного из контуров может быть рассчитано по закону полного тока, то током именно этого контура и следует задаваться при определении взаимной индуктивности.

Приведем примеры.

1) Взаимная индуктивность тороидальной катушки и бесконечно длинного прямолинейного проводника, проходящего по оси симметрии катушки (рис. 3.15). Решим эту задачу двумя способами.

а) Зададимся током катушки I_1 .

По закону полного тока $H_1 = \frac{I_1 w}{2\pi r}$. Индукция $B_1 = \frac{\mu\mu_0 I_1 w}{2\pi r}$. Магнитный поток, проходящий внутри сердечника, в данном случае является и собственным потоком катушки, и взаимным потоком бесконечно длинного проводника, поскольку катушка создает магнитное поле только в сердечнике.

$$\Phi_{21} = \int_S \vec{B}_1 d\vec{S} = \frac{\mu\mu_0 I_1 w}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

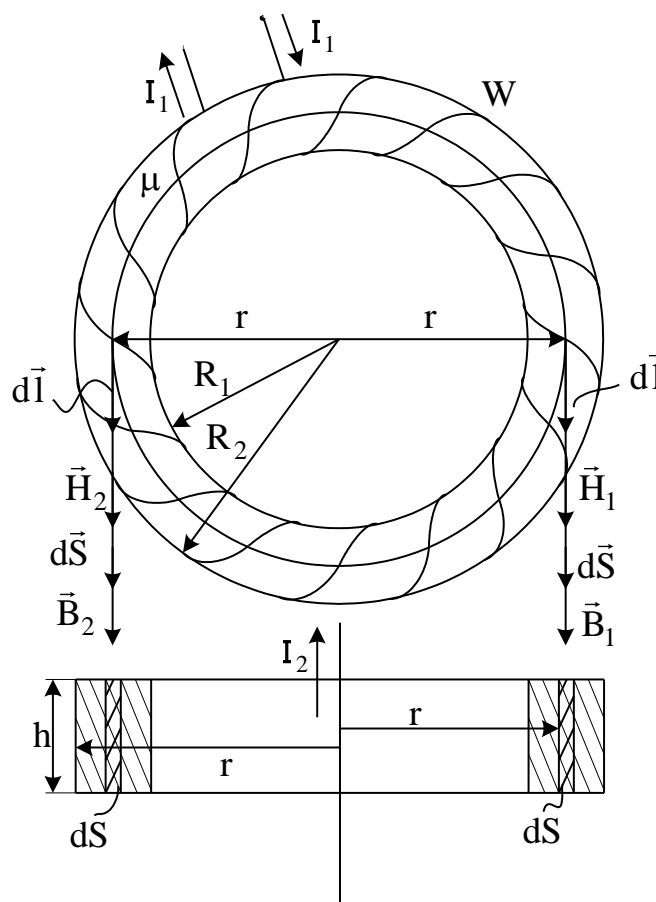


Рисунок 3.15

Для проводника, имеющего один виток, поток и потокосцепление одинаковы:

$$\Psi_{21} = \Phi_{21} = \frac{\mu\mu_0 I_1 w h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Взаимная индуктивность катушки и провода

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu\mu_0 w h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (3.30)$$

б) Зададимся током проводника I_2 .

Силовые линии магнитного поля этого тока представляют собой окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных проводнику. Выберем одну из линий, проходящую внутри сердечника, и применим к ней закон полного тока: $\oint_l \vec{H}_2 d\vec{l} = \oint_l H_2 dl = H_2 \oint_l dl = H_2 2\pi r = I_2$. Откуда $H_2 = \frac{I_2}{2\pi r}$

В этой же точке $B_2 = \frac{\mu\mu_0 I_2}{2\pi r}$.

Хотя магнитное поле проводника существует во всем окружающем его пространстве, но взаимный магнитный поток, сцепленный с витками катушки, проходит в сердечнике:

$$\Phi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_2 d\vec{S}_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu\mu_0 I_2 h}{2\pi r} dr = \frac{\mu\mu_0 I_2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Взаимное потокосцепление катушки: $\Psi_{12} = w\Phi_{12} = \frac{\mu\mu_0 I_2 w h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

Взаимная индуктивность проводника и катушки: $M = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu\mu_0 w h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$, что совпадает с результатом, полученным выше (3.30).

2) Взаимная индуктивность бесконечно длинного прямолинейного проводника и прямоугольной рамки, выполненной из w витков тонкого провода, если проводник и рамка расположены в одной плоскости (рис. 3.16).

Среда – воздух. В этом случае есть единственный вариант расчета, в котором произвольно задаемся током проводника I_1 . Силовые линии магнитного поля этого тока имеют форму окружностей, расположенных в плоскостях, перпендикулярных плоскости рисунка. Одна из силовых линий изображена в виде эллипса. Применяя к ней закон полного тока, получим:

$$\oint_l \vec{H}_1 d\vec{l} = \oint_l H_1 dl = H_1 \oint_l dl = H_1 2\pi r = I_1,$$

откуда $H_1 = \frac{I_1}{2\pi r}$. Индукция магнитного поля: $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ Взаимный магнит-

ный поток рамки: $\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}.$

Рамка имеет w витков, и её взаимное потокоцепление

$$\Psi_{21} = w \Phi_{21} = \frac{\mu_0 I w h}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}.$$

Взаимная индуктивность проводника и рамки $M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 w h}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}.$

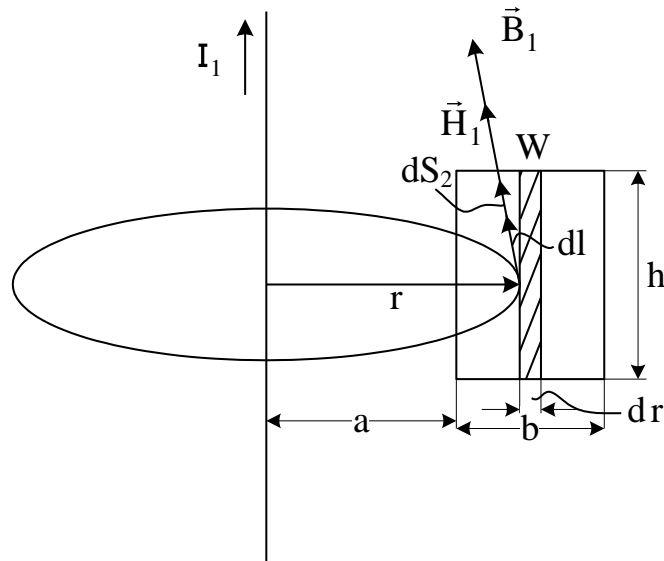


Рисунок 3.16

На этом закончим краткое изучение раздела «Физические основы электротехники».

II. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Электрической цепью называется совокупность устройств, предназначенных для создания и использования электрической энергии.

Основные элементы электрической цепи: источники, соединительные провода, приемники электрической энергии. Кроме того, цепь может содержать различные преобразовательные устройства (трансформаторы, фильтры, выпрямители), измерительные приборы, коммутационную аппаратуру.

В источниках электрической энергии происходит преобразование механической, химической, тепловой и других видов энергий в электрическую энергию. В приемниках электрическая энергия преобразуется в тепло и другие виды энергии.

4. Линейные электрические цепи постоянного тока

Если получение, передача и преобразование энергии происходит при токах, неизменных во времени, такая цепь называется цепью постоянного тока.

Численно электрический ток равен количеству электричества, проходящему через поперечное сечение проводника в единицу времени: $i = \frac{dQ}{dt}$.

Постоянный ток:

$$I = \frac{Q}{t} . \quad (4.1)$$

4.1. Закон Ома в различных формах записи

В разделе «Физические основы электротехники» мы уже дали определения плотности тока δ , удельной проводимости γ и удельного сопротивления ρ , электрического напряжения U и электродвижущей силы E . Были также рассмотрены закон Ома для пассивного участка и законы Кирхгофа.

1) В схемах электрических цепей участок, обладающий сопротивлением, называют резистором и изображают следующим образом (рис. 4.1).

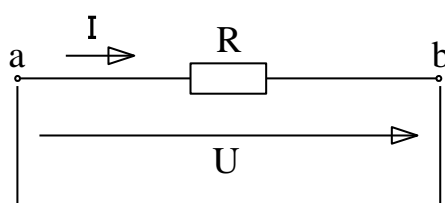


Рисунок 4.1

Связь между величинами выражает закон Ома для пассивного элемента: $I = \frac{U}{R}$. На таком участке направления U и I всегда совпадают, поскольку $R > 0$. С другой стороны $U = \varphi_a - \varphi_b > 0$.

Следовательно, $\varphi_a > \varphi_b$, т.е. на резистивном участке ток может протекать только от большего потенциала к меньшему. Заряды могут самопроизвольно двигаться только в направлении уменьшения потенциала.

Для длительного протекания тока необходимо поддерживать разность потенциалов на каждом пассивном участке. Эту функцию выполняет источник электродвижущей силы (ЭДС) E , в котором под действием сторонних сил происходит перемещение зарядов против сил электрического поля, т.е. от точки с меньшим потенциалом к точке с большим потенциалом:

$$\varphi_a - \varphi_b = E \quad (4.2)$$

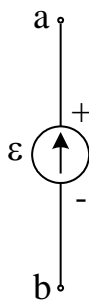


Рисунок 4.3

ЭДС измеряется в вольтах (В), как напряжение и потенциал. Таким образом, для длительного протекания тока необходимо и достаточно выполнения двух условий:

- а) наличие источника электрической энергии;
- б) наличие замкнутого пути для тока.

2) Закон Ома для активного участка (обобщенный закон Ома)
(рис. 4.3)

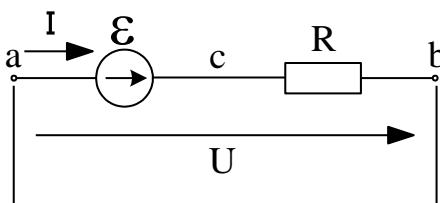


Рисунок 4.3

$$\varphi_c = \varphi_a + E \text{ или } \varphi_a = \varphi_c - E, \varphi_c - \varphi_b = IR \text{ или } \varphi_b = \varphi_c - IR.$$

Найдем напряжение на участке $U = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_c - E - \varphi_c + IR = -E + IR$.

Отсюда

$$U + E = IR. \quad (4.3)$$

Следует обратить внимание, что на схеме направления U , E , I были одинаковыми (от a к b). Если направление какой-либо из этих величин будет противоположным, то знак этой величины в (2.3) надо изменить.

3) Закон Ома для замкнутой одноконтурной цепи (рис. 4.4)

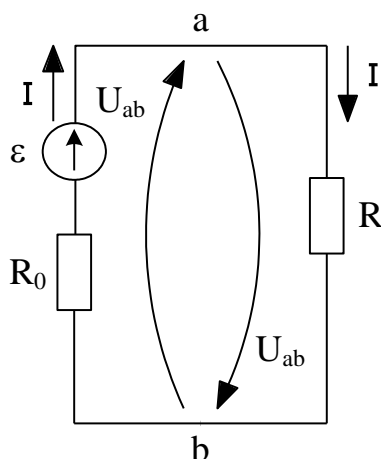


Рисунок 4.4

Для левой части схемы. $U_{ba} + E = IR_0$ (4.3). Для правой части:

$$U_{ab} = IR. \quad (4.4)$$

Но $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$, $U_{ba} = \varphi_b - \varphi_a$, поэтому $U_{ab} + U_{ba} = 0$. Складывая (4.3) и (4.4), получим: $E = I(R_0 + R)$ или

$$I = \frac{E}{R_0 + R}. \quad (4.5)$$

То же выражение можно получить для этой простой цепи с помощью второго закона Кирхгофа.

4.2. Реальные активные элементы цепи и их эквивалентные схемы

Во всех реальных активных элементах цепи при вырабатывании электрической энергии часть этой энергии расходуется внутри самого источника, поэтому с ростом тока напряжение на зажимах источника уменьшается. Зависимость напряжения от тока источника называют его внешней характеристикой (рис. 4.5).

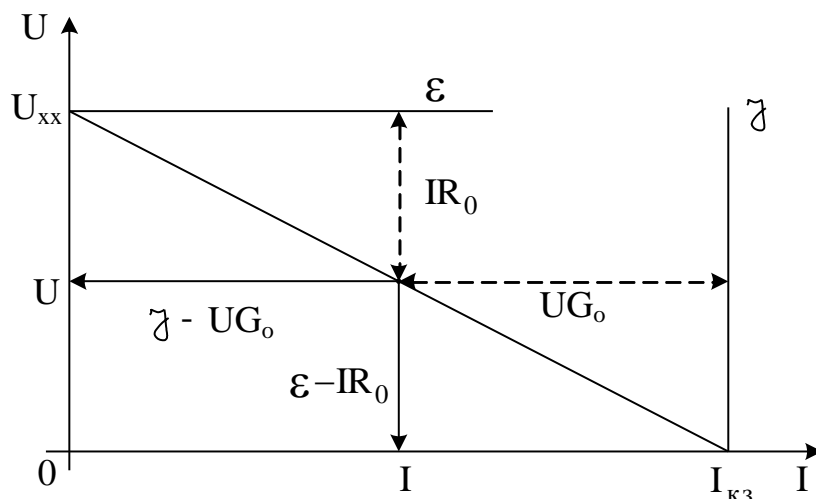


Рисунок 4.5

Наибольшее напряжение при $I = 0$ называется напряжением холостого хода $U_{хх}$, а наибольший ток при $U = 0$ называется током короткого замыкания $I_{кз}$. В реальных источниках ток короткого замыкания не может быть получен экспериментально, т.к. этот режим является аварийным. Поэтому участок внешней характеристики, близкой к режиму холостого хода, экстраполируется (продлевается) до точки короткого замыкания.

Эквивалентной схемой, или схемой замещения, какого-либо реального устройства называется простейшая схема, имеющая такую же внешнюю характеристику, как и реальное устройство.

Возможны два варианта схемы замещения реального активного элемента: схема с источником ЭДС и схема с источником тока. Физически все реальные источники являются источниками ЭДС (рис. 4.6).

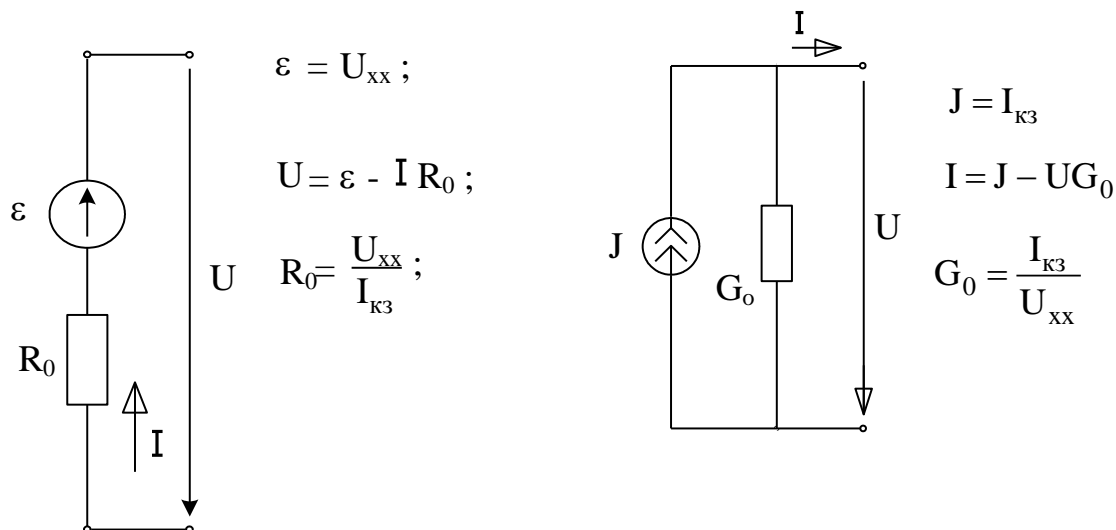


Рисунок 4.6

Законы Кирхгофа

1) Первый закон Кирхгофа рассматривался при изучении стационарного электрического поля, исходя из принципа непрерывности линий тока. Ветвью электрической цепи называется участок с одним и тем же током. Узлом электрической цепи называется точка, в которой сходится не менее трех ветвей (рис. 4.7).

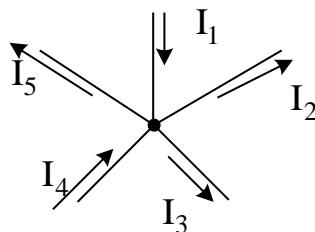


Рисунок 4.7

Для узла электрической цепи алгебраическая сумма токов равна нулю:

$$\sum I_k = 0. \quad (4.6)$$

Токи, входящие в узел, берутся со знаком «минус», а выходящие из узла - со знаком «плюс».

$$-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

Второй закон Кирхгофа в «Физических основах электротехники» был получен для простейшей одноконтурной цепи.

Теперь рассмотрим более сложный случай. Контуром электрической цепи называется замкнутый путь, проходящий по ветвям цепи, причем ни одна ветвь не участвует дважды. Выбираем произвольно направление обхода контура (рис. 4.8).

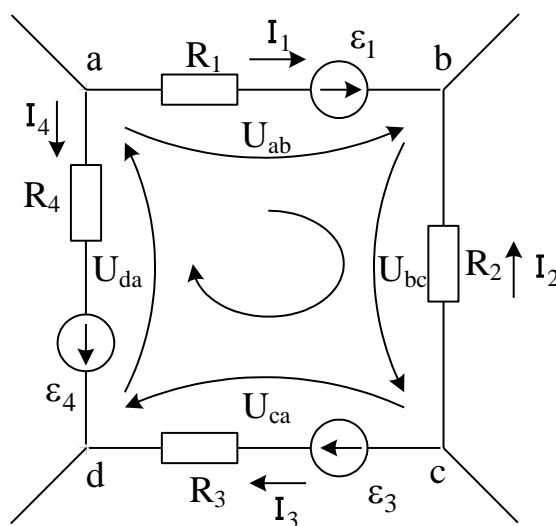


Рисунок 4.8

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b; U_{bc} = \varphi_b - \varphi_c, U_{cd} = \varphi_c - \varphi_d, U_{da} = \varphi_d - \varphi_a$$

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{da} = 0. \quad (4.7)$$

В контуре алгебраическая сумма напряжений равна нулю. $\sum U_k = 0$. Такая запись второго закона Кирхгофа используется для расчета сложных электрических цепей с помощью ЭВМ. При ручном расчете цепей более удобна другая запись второго закона Кирхгофа.

Запишем для каждой ветви контура обобщенный закон Ома и сложим полученные уравнения с учетом (4.7).

$$\begin{aligned} U_{ab} + E_1 &= I_1 R_1; \\ U_{bc} &= -I_2 R_2; \\ U_{cd} + E_3 &= I_3 R_3; \\ U_{da} - E_4 &= -I_4 R_4; \\ E_1 + E_3 - E_4 &= I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4. \end{aligned}$$

В общем случае

$$\sum E_k = \sum I_k R_k. \quad (4.8)$$

В контуре алгебраическая сумма ЭДС. равна алгебраической сумме падений напряжений. Если ток или ЭДС совпадают по направлению с обходом контура, они входят в уравнение со знаком «плюс», в противном случае - со знаком «минус».

4.4. Работа и мощность цепи постоянного тока. Баланс мощностей

Работа, совершаемая силами электрического поля при протекании тока, выражается следующим образом:

$$A = UQ = UI t . \quad (4.9)$$

Работа измеряется в джоулях (Дж). Работа, совершаемая в единицу времени, называется мощностью:

$$P = \frac{A}{t} = UI . \quad (4.10)$$

Единицей измерения мощности является ватт (Вт=Дж/с). Для пассивного участка (рис. 4.9) имеем: $U = RI$. Умножая на величину тока, получим: $UI = RI^2$, $P_{\text{пост}} = UI$, $P_{\text{потр}} = RI^2$.

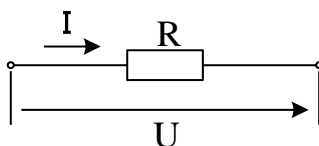


Рисунок 4.9

На пассивном участке вся поступающая мощность выделяется в виде тепла. Этот процесс преобразования электрической энергии в тепловую необратим.

$$P_{\text{пост}} = P_{\text{потр}} \quad (4.11)$$

Рассмотрим активный участок (рис. 4.10):

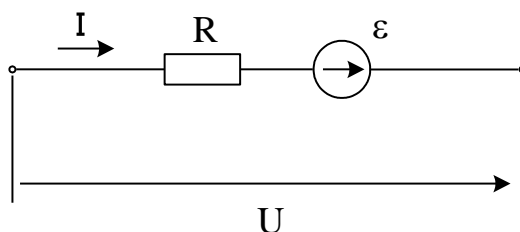


Рисунок 4.10

По закону Ома: $U+E=IR$. Умножая это выражение на величину тока, получим уравнение энергетического баланса:

$$EI+UI=RI^2. \quad (4.12)$$

Величины, входящие в это уравнение, имеют размерность мощностей, определенные названия и физический смысл.

$EI=P_{\text{выр}}$ – мощность, вырабатываемая источником ЭДС. $P_{\text{выр}}>0$, если E и I совпадают по направлению и $P_{\text{выр}}<0$, если E и I противоположны по направлению.

Если $P_{\text{выр}}>0$, то источник отдает мощность остальной цепи, а если $P_{\text{выр}}<0$, то источник забирает мощность из цепи.

$UI=P_{\text{пост}}$ – мощность поступающая на участок. $P_{\text{пост}}>0$, если U и I совпадают по направлению, в этом случае мощность из остальной схемы поступает на данный участок, который является потребителем энергии.

$P_{\text{пост}}<0$, если U и I не совпадают по направлению, в этом случае мощность с данного участка отдается в остальную схему. Участок работает в режиме генератора энергии. $RI^2=P_{\text{потр}}$ – потребляемая мощность. Она всегда положительна.

Рассмотрим частные случаи (рис. 4.11- 4.13).

1)

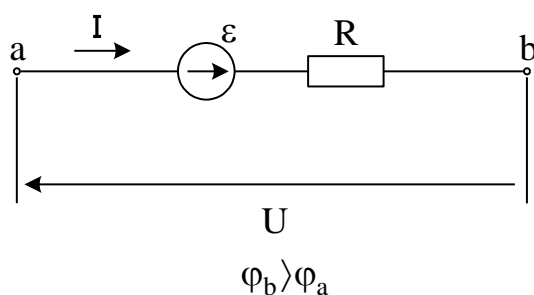


Рисунок 4.11

$$E - U = RI; EI - UI = RI^2;$$

$$P_{\text{пост}} = -UI < 0;$$

$$\varphi_b > \varphi_a; EI = UI + RI^2.$$

Мощность, вырабатываемая источником, частично выделяется в виде тепла на данном участке, и отдается в остальную схему. Участок работает в режиме генератора.

2)

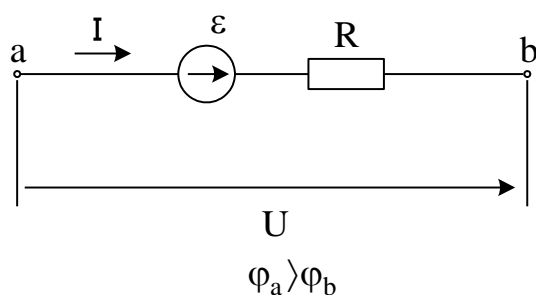


Рисунок 4.12

$$E + U = RI; P_{\text{пост}} > 0;$$

$$EI + UI = RI^2; \varphi_a > \varphi_b.$$

Мощность, вырабатываемая на данном участке, и мощность, поступающая на участок извне, выделяются в виде тепла на сопротивлении R .

Такие направления величин характерны для режима торможения двигателя. Участок работает в режиме потребителя.

3)

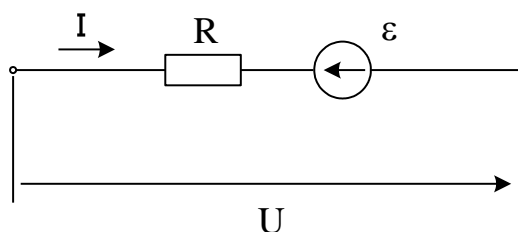


Рисунок 4.13

$$-E + U = RI;$$

$$P_{\text{выр}} = -EI < 0;$$

$$UI = EI + RI^2.$$

Мощность, поступающая на участок, расходуется на создание вырабатываемой мощности и выделяется в виде тепла. Такие направления характерны для режима подзаряда аккумулятора. Участок является потребителем энергии.

В замкнутой цепи алгебраическая сумма поступающих мощностей всегда равна нулю. Поэтому уравнение баланса мощностей для замкнутой цепи записывается следующим образом:

$$\sum P_{\text{выр}} = \sum P_{\text{потр}}. \quad (4.13)$$

Это уравнение отражает закон сохранения энергии.

Если в схеме имеется источник тока, то он также вырабатывает мощность:

$$P_{\text{выр } j} = jU_j, \quad (4.14)$$

где $U_J = \varphi_a - \varphi_b$ (рис. 4.14)

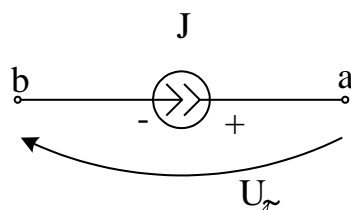


Рисунок 4.14

4.5. Расчет простых цепей постоянного тока

Последовательное соединение элементов - это такое соединение, когда конец предыдущего элемента служит началом последующего. При этом получается неразветвленная цепь, на всех участках которой ток один и тот же, а напряжения - разные.

Параллельное соединение - это соединение, при котором к одному узлу подключены начала всех элементов, а к другому узлу - концы всех элементов. При этом токи на всех участках различные, а напряжения - одинаковые.

Простой цепью называется цепь, представляющая собой комбинацию последовательных и параллельных соединений.

1) Последовательное соединение пассивных элементов (рис. 4.15)

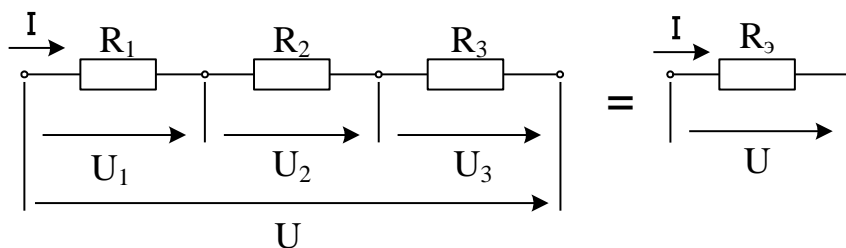


Рисунок 4.15

Здесь и далее будем вести расчет методом эквивалентных преобразований.

Две схемы называются эквивалентными друг другу, если при замене одной из них на другую не изменяются токи и напряжения в непреобразованной части цепи.

Для нахождения эквивалентного сопротивления последовательного соединения воспользуемся законом Ома и вторым законом Кирхгофа.

$$U_1 = IR_1; U_2 = IR_2; U_3 = IR_3;$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = I(R_1 + R_2 + R_3) = IR_3.$$

Отсюда $R_3 = R_1 + R_2 + R_3$. В общем случае:

$$R_3 = \sum R_k. \quad (4.15)$$

При последовательном соединении суммируются сопротивления.

$$I = \frac{U}{\sum R_k}, U_k = IR_k.$$

2) Параллельное соединение пассивных элементов (рис. 4.16)

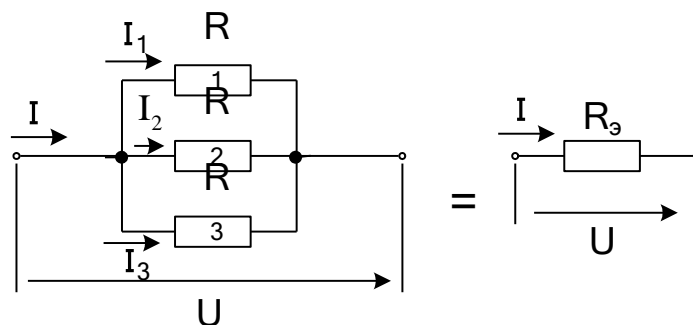


Рисунок 4.16

Воспользуемся законом Ома и первым законом Кирхгофа.

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}, I_3 = \frac{U}{R_3}, G_k = 1/R_k - \text{проводимость ветви.}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) = U(G_1 + G_2 + G_3) = UG_9;$$

$$G_9 = G_1 + G_2 + G_3.$$

В общем случае:

$$G_9 = \Sigma G_k. \quad (4.17)$$

При параллельном соединении суммируются проводимости ветвей.

$$R_9 = 1/G_9;$$

$$I = UG_9 = U/R_9.$$

Рассмотрим очень важный частный случай двух параллельных ветвей (рис. 4.17).

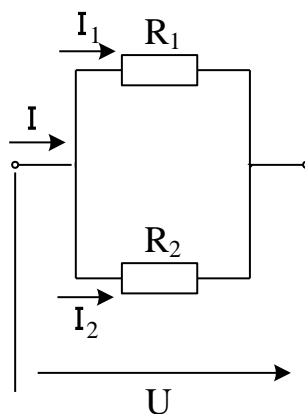


Рисунок 4.17

$$G_9 = G_1 + G_2 = 1/R_1 + 1/R_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}; \quad R_9 = \frac{1}{G_9} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

$$U = IR_9 = I_1 R_1 = I_2 R_2; \quad I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I_1 R_1.$$

Отсюда

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (4.18)$$

Это очень важное соотношение, которое принято называть формулой разброса токов между ветвями параллельного соединения.

3) Смешанное соединение пассивных элементов

Оно представляет собой комбинацию последовательных и параллельных соединений, причем таких комбинаций существует бесчисленное множество. Рассмотрим простейшую из них (рис. 4.18).

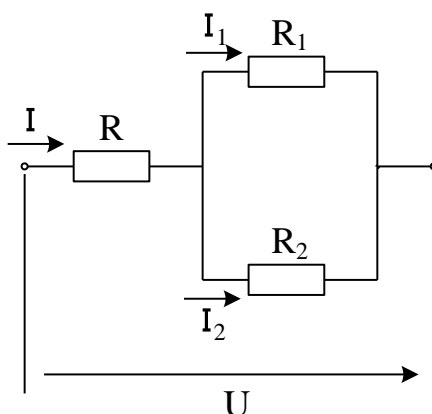


Рисунок 4.18

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; R_{\Sigma} = R + R_{12}; I = \frac{U}{R_{\Sigma}};$$

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; I_2 = I - I_1.$$

4) Последовательное соединение активных элементов (рис. 4.19)

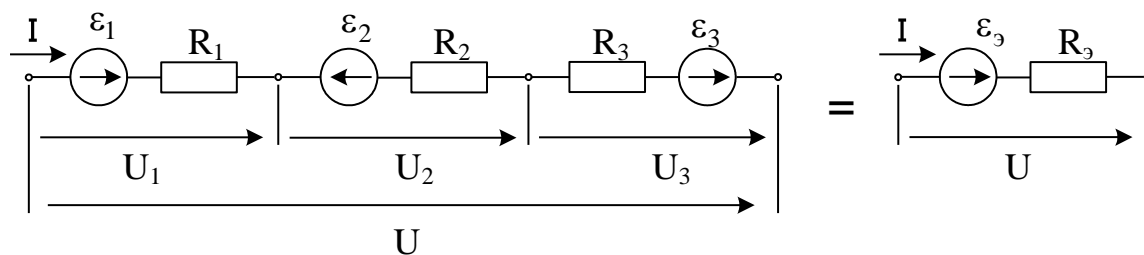


Рисунок 4.19

По обобщенному закону Ома: $U_1 + E_1 = IR_1$; $U_2 - E_2 = IR_2$; $U_3 + E_3 = IR_3$. Сложим эти выражения и учтем, что $U_1 + U_2 + U_3 = U$. Тогда получим:

$$U + (E_1 - E_2 + E_3) = I(R_1 + R_2 + R_3).$$

Для эквивалентной схемы $U + E_9 = IR_9$, следовательно:

$$E_9 = E_1 - E_2 + E_3; R_9 = R_1 + R_2 + R_3.$$

В общем случае:

$$E_y = \sum E_k; R_y = \sum R_k. \quad (4.19)$$

При последовательном соединении ЭДС суммируются алгебраически, а сопротивления — арифметически.

5) Параллельное соединение активных элементов (рис. 4.20)

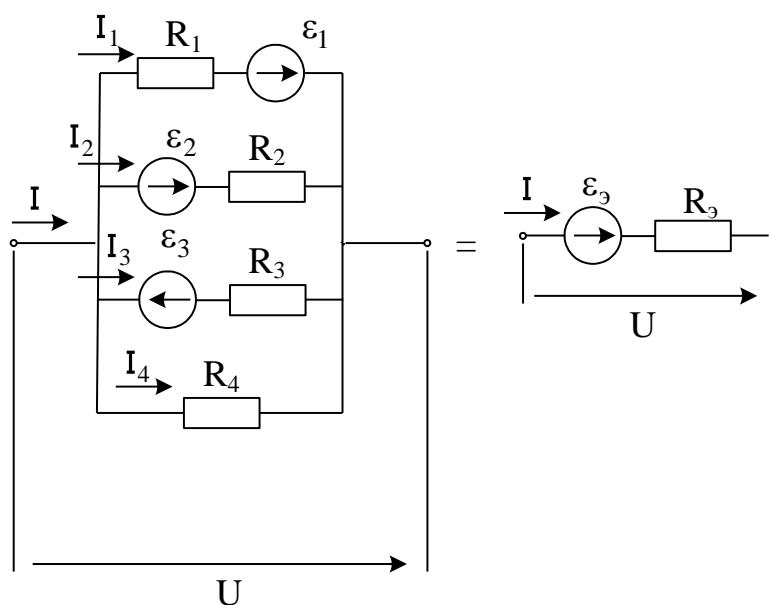


Рисунок 4.20

По обобщенному закону Ома для каждой ветви:

$$\begin{aligned}
 U + E_1 &= I_1 R_1; I_1 = U G_1 + E_1 G_1; \\
 U + E_2 &= I_2 R_2; I_2 = U G_2 + E_2 G_2; \\
 U - E_3 &= I_3 R_3; I_3 = U G_3 - E_3 G_3; \\
 U &= I_4 R_4; I_4 = U G_4.
 \end{aligned}$$

По закону Кирхгофа $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$. Таким образом:

$$I = U(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + (E_1 G_1 + E_2 G_2 - E_3 G_3 + 0' G_4);$$

$$I = \left(U + \frac{\sum E_k G_k}{\sum G_k} \right) \sum G_k.$$

Следовательно:

$$E_y = \frac{\sum E_k G_k}{\sum G_k}; \quad (4.20)$$

$$G_y = \sum G_k; R_y = 1/G_y.$$

В числителе выражения E_y сумма алгебраическая.

б) Эквивалентное преобразование источника ЭДС в источник тока и наоборот (4.21)

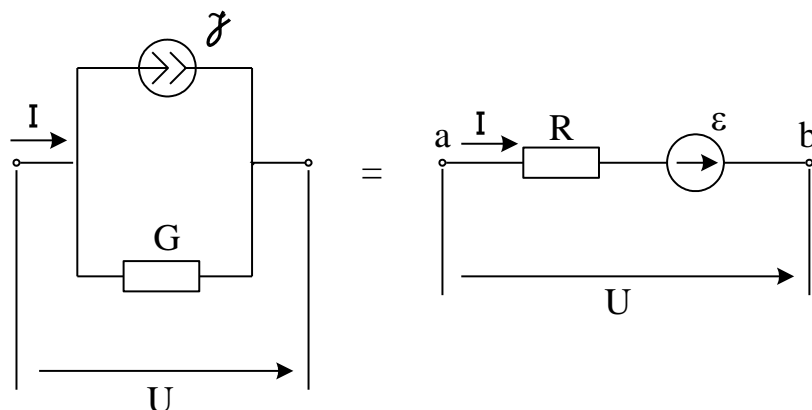


Рисунок 4.21

Эти две схемы эквивалентны друг другу, если $R = 1/G$; $E = jR$. И наоборот, $j = \frac{E}{R} = EG$; $G = 1/R$. В основе преобразования лежат две эквивалентных схемы реальных источников.

В практических задачах могут встретиться случаи, когда источник тока включен параллельно двум или нескольким ветвям (рис. 4.22). Тогда можно во всех промежуточных узлах включить 2 источника тока, направленных противоположно. При этом токи в ветвях не изменятся.

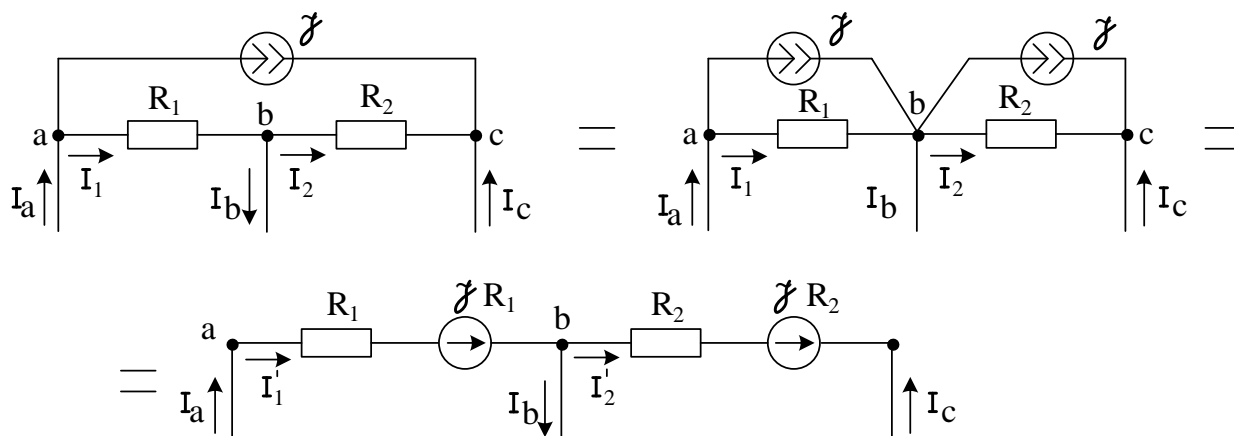


Рисунок 4.22

После замены источников тока эквивалентными ЭДС токи в резисторах R_1 и R_2 изменятся. Они обозначены I'_1 и I'_2 .

Следует обратить внимание, что при всех эквивалентных преобразованиях не изменяются токи и напряжения в непреобразованной части схемы.

Пример расчета цепи методом эквивалентных преобразований

Порядок расчета зависит от того, в какой ветви нужно определить ток, так как удобно не затрагивать при преобразованиях ветвь с искомым током. Преобразуется вся остальная цепь по отношению к зажимам выбранной ветви. Метод расчета применим только в том случае, если цепь представляет собой комбинацию параллельных и последовательных соединений.

Рассмотрим цепь, изображенную на рисунке 4.23.

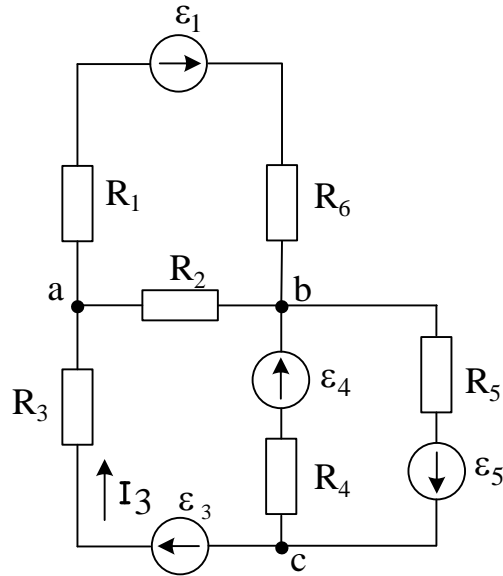


Рисунок 4.23

Выберем для расчета ветвь с током I_3 и зажимами c и a . Преобразуем эквивалентно два параллельных соединения относительно пар узлов a, b и b, c . Обозначим:

$$R_{16} = R_1 + R_6; G_{16} = 1/(R_{16}) = 1/(R_1 + R_6).$$

Используя полученные ранее соотношения (2.20), запишем:

$$E_{13} = \frac{E_1 \cdot G_{16} + 0 \cdot G_2}{G_{16} + G_2}; G_{13} = G_{16} + G_2; R_{13} = \frac{1}{G_{13}} = \frac{(R_1 + R_6) \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_6};$$

$$E_{45} = \frac{E_4 G_4 - E_5 G_5}{G_4 + G_5}; R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}.$$

Получим следующую схему с последовательным соединением активных участков (рис. 4.24), в которой сохранится ток I_3 в не преобразованной части цепи.

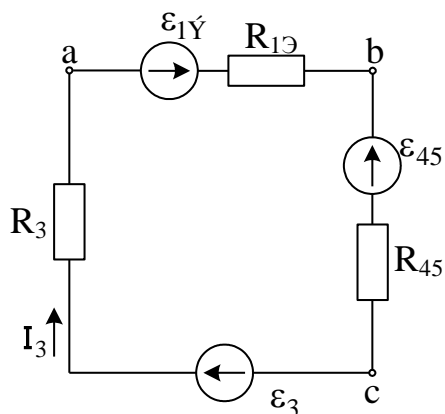


Рисунок 4.24

Согласно соотношениям (4.19), запишем:

$$E_3 = E_{13} - E_{45} + E_3;$$

$$R_3 = R_{13} + R_{45} + R_3;$$

$$I_3 = \frac{E_3}{R_3}.$$

4.6. Методы расчета сложных цепей постоянного тока

Сложной называется цепь, которая не может быть преобразована рассмотренными выше методами.

Методы, рассматриваемые далее, могут быть использованы и для последовательно – параллельных цепей; но для них эти методы менее рациональны. При расчете считаются известными ЭДС и токи источников и сопротивления всех резисторов. Неизвестными являются токи ветвей.

1) Расчет сложных цепей с помощью законов Кирхгофа

Для расчета цепи по законам Кирхгофа составляется система независимых уравнений, общее число которых равно числу ветвей, не содержащих источники тока.

Если m – общее число ветвей, m_J – число ветвей, содержащих источники тока, по двум законам Кирхгофа нужно составить k уравнений, где $k = m - m_J$. Если число узлов в цепи обозначить y , то по первому закону Кирхгофа число независимых уравнений на единицу меньше числа узлов: $k_I = y - 1$. Все остальные уравнения нужно составить по второму закону Кирхгофа:

$$k_{II} = k - k_I = m - m_J - y + 1.$$

Чтобы уравнения по второму закону Кирхгофа были независимыми, они должны быть составлены для независимых контуров, не содержащих источников тока.

Контур считается независимым, если он отличается от предыдущих контуров хотя бы одной новой ветвью. Приведем пример (рис. 4.25).

В данной схеме

$$m = 6; m_J = 1; I_6 = J;$$

$$k = m - m_J = 5;$$

$$y = 4; k_I = 3; k_{II} = 5 - 3 = 2.$$

Составляем уравнения. Первый закон Кирхгофа: в узле $\sum I_k = 0$. Входящие в узел токи берем со знаком «минус», выходящие – со знаком «плюс».

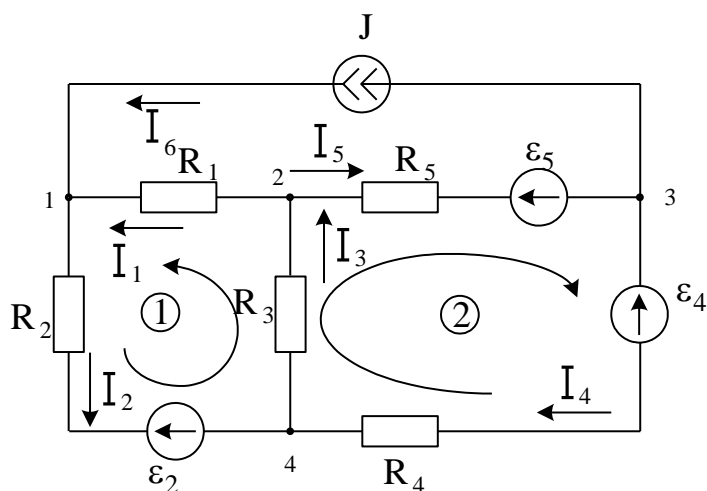


Рисунок 4.25

Для узла 1: $-J - I_1 + I_2 = 0$.

Для узла 2: $I_1 - I_3 + I_5 = 0$.

Для узла 3: $-I_5 + I_4 + J = 0$.

Второй закон Кирхгофа: в контуре $\sum I_k R_k = \sum E_k$.

Направления обхода контуров произвольно выбраны на схеме. Если ток или ЭДС направлены по обходу контура, они включаются в уравнение со знаком «плюс», в противном случае ставится знак «минус»

Для контура ①: $R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2$.

Для контура ②: $R_3 I_3 + R_5 I_5 + R_4 I_4 = E_5 + E_4$.

Совместное решение этих пяти уравнений позволит определить неизвестные токи в цепи. Однако для ручного счета эта работа трудоемка и нерациональна. Можно использовать для решения этой системы ЭВМ с соответствующей программой. Если же все-таки нужно рассчитать цепь вручную, то следует использовать такие методы, которые основаны на одном из законов Кирхгофа и имеют меньшее число уравнений. На первом законе Кирхгофа базируется метод узловых потенциалов, а на втором законе Кирхгофа – метод

контурных токов. Следует выбирать тот из методов, который дает меньшее количество уравнений. Так, например, в схеме, приведенной выше, более рационален метод контурных токов (2 уравнения по сравнению с 3 уравнениями по методу узловых потенциалов).

Разработаны также и другие методы расчета сложных цепей с большим числом узлов и ветвей, но они в данном курсе не рассматриваются.

2) Метод узловых потенциалов

В основе метода лежат следующие положения. Токи в ветвях цепи определяются не абсолютными значениями потенциалов узлов, а их разностями, т.е. напряжениями. Поэтому потенциал одного из узлов всегда можно выбрать произвольно, в том числе принять равным нулю. Этот узел называется базисным. Расчетные уравнения составляются по I закону Кирхгофа. В результате расчета сначала определяются потенциалы остальных узлов, а затем токи в ветвях вычисляются с помощью обобщенного закона Ома.

Рассмотрим метод узловых потенциалов на примере следующей схемы (рис. 4.26).

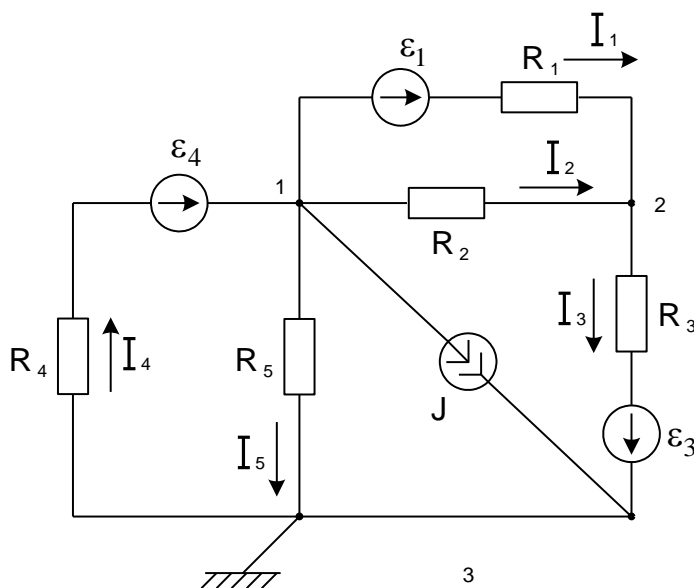


Рисунок 4.26

Задаемся произвольно положительными направлениями токов в ветвях и для каждой ветви записываем обобщенный закон Ома. Выбираем узел 3 в качестве базисного узла и принимаем $\varphi_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 - \varphi_2 + E_1 &= I_1 R_1; & I_1 &= (\varphi_1 - \varphi_2 + E_1) G_1; \\
 \varphi_1 - \varphi_2 &= I_2 R_2; & I_2 &= (\varphi_1 - \varphi_2) G_2; \\
 \varphi_2 - \varphi_3 + E_3 &= I_3 R_3; & I_3 &= (\varphi_1 + E_3) G_3; \\
 \varphi_3 - \varphi_1 + E_4 &= I_4 R_4; & I_4 &= (-\varphi_1 + E_4) G_4; \\
 \varphi_1 - \varphi_3 &= I_5 R_5; & I_5 &= \varphi_1 G_5.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Уравнения по 1 закону Кирхгофа для узлов 1 и 2:

$$\begin{aligned}
 -I_4 + I_5 + I_1 + I_2 + J &= 0; \\
 -I_1 - I_2 + I_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Подставляем уравнения (4.21) в (4.22):

$$\begin{cases}
 -(-\varphi_1 + E_4)G_4 + \varphi_1 G_5 + (\varphi_1 - \varphi_2 + E_1)G_1 + (\varphi_1 - \varphi_2)G_2 + J = 0; \\
 -(\varphi_1 - \varphi_2 + E_1)G_1 - (\varphi_1 - \varphi_2)G_2 + (\varphi_1 + E_3)G_3 = 0.
 \end{cases} \tag{4.23}$$

Преобразуем систему (4.23):

$$\begin{cases}
 \varphi_1(G_1 + G_2 + G_5 + G_4) + \varphi_2(-G_1 - G_2) = -E_1 G_1 + E_4 G_4 - J; \\
 \varphi_1(-G_1 - G_2) + \varphi_2(G_1 + G_2 + G_3) = E_1 G_1 - E_3 G_3.
 \end{cases} \tag{4.24}$$

Обозначим $G_{11} = G_1 + G_2 + G_5 + G_4$; $G_{22} = G_1 + G_2 + G_3$; $G_{12} = G_{21} = -(G_1 + G_2)$;
 $I_{1y} = E_4 G_4 - E_1 G_1 - J$; $I_{2y} = E_1 G_1 - E_3 G_3$.

Система (4.24) принимает вид:

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{21} = I_{1y}; \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} = I_{2y}. \end{cases} \quad (4.25)$$

Из системы (4.25) определяется φ_1 , φ_2 , а затем согласно уравнениям (4.21) вычисляются токи ветвей.

В общем случае $G_{kk} = \sum G_k > 0$ - собственная проводимость узла k , величина всегда положительная и равная сумме проводимостей ветвей, подключенных к данному узлу.

$G_{kl} = G_{lk} < 0$ - общая проводимость узлов k и l , величина всегда отрицательная и равная по абсолютной величине сумме проводимостей тех ветвей, которые непосредственно соединяют узлы k и l .

$I_{ky} = \sum E_k G_k + \sum J_k$ - узловой ток k -го узла, равный алгебраической сумме произведений ЭДС на проводимости в ветвях, подключенных к узлу k , и алгебраической сумме токов источников тока, также подключенных к этому узлу. Со знаком «плюс» берутся слагаемые тех источников, которые направлены к данному узлу, если же источники имеют направление от узла k , то их вклады в I_{ky} берутся со знаком «минус».

Общий порядок расчета цепи методом узловых потенциалов

- 1) Определить число узлов в цепи, пронумеровать их и выбрать базисный узел, приняв его потенциал равным нулю.
- 2) Записать систему уравнений порядка $(y-1)$ типа (4.25) относительно неизвестных потенциалов узлов.
- 3) По схеме определить величины G_{kk} , G_{kl} , I_{ky} согласно сформулированным выше правилам.
- 4) Решить систему уравнений (4.25) и определить потенциалы узлов.
- 5) Определить токи в ветвях по обобщенному закону Ома.

б) Осуществить проверку результатов с помощью первого закона Кирхгофа или по балансу мощностей.

Частный случай представляет собою цепь, содержащую в какой – либо ветви идеальную ЭДС (рис. 4.27). Например, если в рассмотренной ранее схеме сопротивление R_1 было бы равно нулю, то в этом случае следует в качестве базисного узла выбрать один из узлов на зажимах идеальной ЭДС.

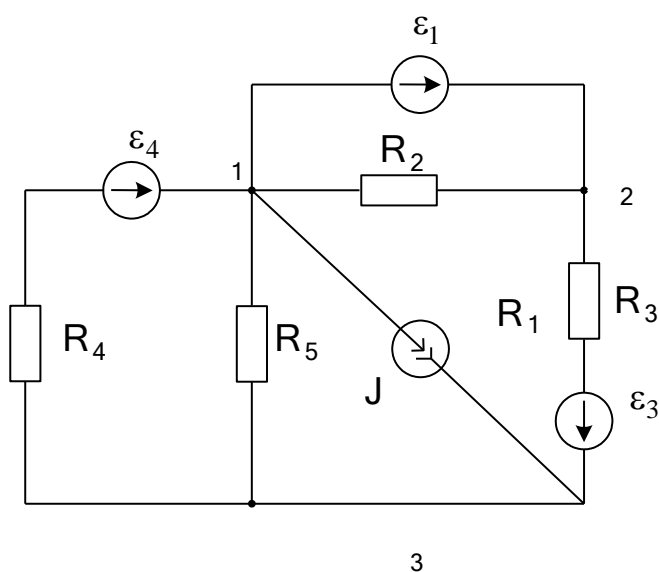


Рисунок 4.27

Например, пусть $\varphi_1 = 0$; тогда $\varphi_2 = E_1$. остается определить φ_3 , т.е. порядок системы уравнений понижается на единицу. Уравнение для определения неизвестного потенциала φ_3 имеет следующий вид:

$$-\varphi_2 G_3 + \varphi_3 (G_4 + G_5 + G_3) = -E_4 G_4 + J + E_3 G_3.$$

Поскольку φ_2 известно и равно E_1 , то

$$\varphi_3 (G_4 + G_5 + G_3) = E_1 G_3 - E_4 G_4 + J + E_3 G_3.$$

Далее определяется φ_3 и токи ветвей по обобщенному закону Ома, кроме I_1 . Ток I_1 нельзя определить таким же образом, так как проводимость этой ветви бесконечно велика ($R_1=0$; $G_1=1/R_1=\infty$). Этот ток определяется с помощью первого закона Кирхгофа.

3) Метод контурных токов

В основе метода лежит допущение о том, что в каждом контуре существует независимый контурный ток. При таком допущении первый закон Кирхгофа удовлетворяется автоматически, а расчетные уравнения выводятся с помощью второго закона Кирхгофа.

Ток источника тока рассматривается при этом как известный контурный ток, для которого следует выбрать замкнутый путь.

Рассмотрим метод контурных токов на конкретном примере (рис. 4.28).

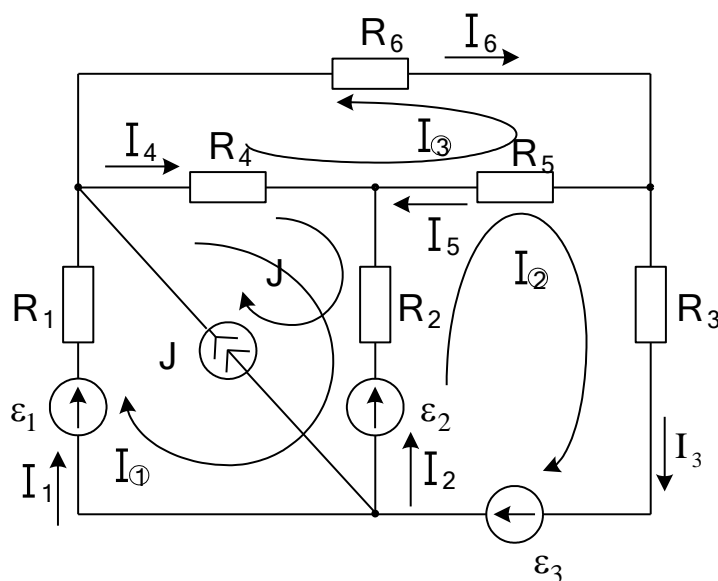


Рисунок 4.28

Задаемся произвольно положительными направлениями токов в ветвях и контурных токов в независимых контурах. Выбираем путь для замыкания известного контурного тока J . Выразим токи всех ветвей через контурные токи и убедимся на примере узла 1, что первый закон Кирхгофа превращается в тождество при любых значениях контурных токов.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_{\textcircled{1}}; \\
 I_2 &= -J - I_{\textcircled{1}} + I_{\textcircled{2}}; \\
 I_3 &= I_{\textcircled{2}}; \\
 I_4 &= I_{\textcircled{1}} + J + I_{\textcircled{3}}; \\
 I_5 &= -I_{\textcircled{2}} - I_{\textcircled{3}}; \\
 I_6 &= -I_{\textcircled{3}}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Для узла 1: $-I_1 + I_4 + I_6 - J = 0$.

Через контурные токи: $-I_{\textcircled{1}} + I_{\textcircled{1}} + J + I_{\textcircled{3}} - I_{\textcircled{3}} - J = 0$.

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа.

$$\begin{cases} I_1 R_1 + I_4 R_4 - I_2 R_2 = E_1 - E_2; \\ I_2 R_2 - I_5 R_5 + I_3 R_3 = E_2 + E_3; \\ I_4 R_4 - I_5 R_5 - I_6 R_6 = 0. \end{cases} \tag{4.27}$$

Подставляем выражения токов ветвей через контурные токи (4.26) в уравнения (4.27):

$$\begin{cases} I_{\textcircled{1}} R_1 + (I_{\textcircled{1}} + J + I_{\textcircled{3}}) R_4 - (-J - I_{\textcircled{1}} + I_{\textcircled{2}}) R_2 = E_1 - E_2; \\ (-J - I_{\textcircled{1}} + I_{\textcircled{2}}) R_2 - (-I_{\textcircled{2}} - I_{\textcircled{3}}) R_5 + I_{\textcircled{2}} R_3 = E_2 + E_3; \\ (I_{\textcircled{1}} + J + I_{\textcircled{3}}) R_4 - (-I_{\textcircled{2}} - I_{\textcircled{3}}) R_5 - (-I_{\textcircled{3}}) R_6 = 0. \end{cases} \tag{4.28}$$

Группируем слагаемые в системе (4.28). Составляющие, созданные известным контурным током J , переносим в правую часть уравнений и будем

их рассматривать как дополнительные ЭДС, компенсирующие влияние источника тока J .

$$\begin{cases} I_{\textcircled{1}}(R_1 + R_2 + R_4) + I_{\textcircled{2}}(-R_2) + I_{\textcircled{3}}R_4 = E_1 - E_2 - JR_2 - JR_4; \\ I_{\textcircled{1}}(-R_2) + I_{\textcircled{2}}(R_2 + R_5 + R_3) + I_{\textcircled{3}}R_5 = E_2 + E_3 + JR_2; \\ I_{\textcircled{1}}R_4 + I_{\textcircled{2}}R_5 + I_{\textcircled{3}}(R_4 + R_5 + R_6) = -JR_4. \end{cases} \quad (4.29)$$

Обозначим:

$$R_{11} = R_1 + R_4 + R_2;$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_5;$$

$$R_{33} = R_4 + R_5 + R_6.$$

Эти величины называются собственными сопротивлениями соответствующих контуров. Они всегда положительны и равны сумме сопротивлений данного контура:

$$R_{kk} = \sum R_k > 0.$$

Обозначим также:

$$R_{21} = R_{12} = -R_2;$$

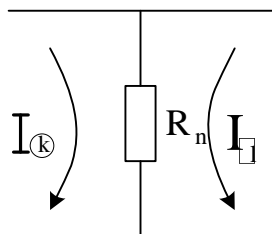
$$R_{23} = R_{32} = R_5;$$

$$R_{31} = R_{13} = R_4.$$

Следует обратить внимание, что на участке с сопротивлением R_2 контурные токи $I_{\textcircled{1}}$ и $I_{\textcircled{2}}$ направлены навстречу друг другу, а на участках с сопротивлениями R_4 и R_5 контурные токи $I_{\textcircled{1}}, I_{\textcircled{3}}$ и $I_{\textcircled{2}}, I_{\textcircled{3}}$ направлены одинаково.

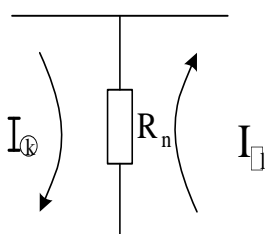
В общем случае величины $R_{kl} = R_{lk}$ называются общими (взаимными) сопротивлениями двух контуров k и l , причем возможны 3 варианта (рис. 4.29):

а)



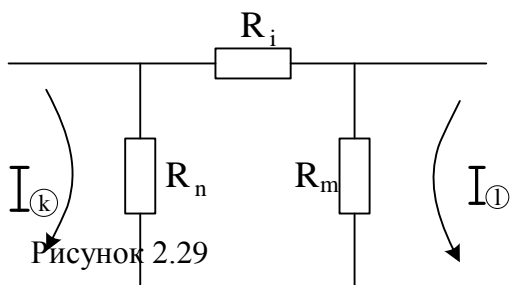
$R_{kl} = R_{lk} = R_n > 0$ – в общем сопротивлении направления двух контурных токов совпадают;

б)



$R_{kl} = R_{lk} = -R_n < 0$ – в общем сопротивлении направления двух контурных токов встречные;

в)



$R_{kl} = R_{lk} = 0$ – два контура не имеют общих сопротивлений.

Рисунок 4.29

Введем обозначения для правых частей системы (4.29):

$$E_{\ominus} = E_1 - E_2 - JR_4 - JR_2;$$

$$E_{\odot} = E_3 + E_2 + JR_2;$$

$$E_{\textcircled{3}} = -JR_4.$$

Будем называть эти величины контурными ЭДС соответствующих контуров.

В общем случае

$$E_{\textcircled{k}} = \sum (E_k + JR_k),$$

т.е. контурная ЭДС равна алгебраической сумме ЭДС контура и дополнительных ЭДС, учитывающих влияние источника тока.

Принятые обозначения позволяют выбрать для расчета контурных токов следующую схему (рис. 4.30).

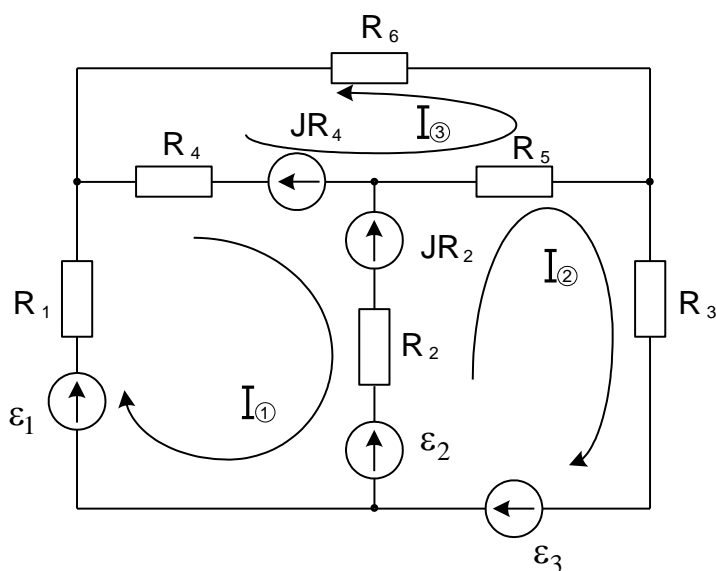


Рисунок 4.30

Следует обратить внимание, что дополнительные э.д.с. введены в тех ветвях, по которым замыкался ток J , причем их направления противоположны току J на этих участках. После введения обозначений система (4.29) примет следующий вид:

$$\begin{cases} I_1 R_{11} + I_2 R_{12} + I_3 R_{13} = E_1; \\ I_1 R_{21} + I_2 R_{22} + I_3 R_{23} = E_2; \\ I_1 R_{31} + I_2 R_{32} + I_3 R_{33} = E_3. \end{cases} \quad (4.30)$$

Решая систему (4.30), можно определить контурные токи, а по ним – токи ветвей согласно (4.26).

Общий порядок расчета цепи методом контурных токов

1) Выбираем произвольно условные положительные направления токов в ветвях и неизвестных контурных токов; для известного контурного тока J выбираем замкнутый путь.

2) Выражаем токи в ветвях через контурные токи.

3) Составляем расчетную схему с учетом влияния источников тока: во всех резисторах, по которым замыкается ток J , вводим дополнительные ЭДС, равные по величине падениям напряжения JR_i и противоположные им по направлению, а сами источники тока убираем.

4) Записываем систему уравнений типа (4.30) и из схемы определяем R_{kk}, R_{kl}, E_k

5) Решаем систему (4.30), определяя контурные токи.

6) Определяем токи ветвей согласно пункту 2.

7) Осуществляем проверку результатов с помощью второго закона Кирхгофа или баланса мощностей.

В общем случае система уравнений, составленная по методу контурных токов, имеет следующий вид:

[illegible]

Найдем решение этой системы по методу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{- главный определитель системы.}$$

[illegible]

Для других контурных токов составляются определители, в которых столбец свободных членов заменяет соответствующий столбец определителя Δ .

Находим контурные токи:

$$I_{\textcircled{1}} = \frac{\Delta_{\textcircled{1}}}{\Delta} = E_{\textcircled{1}} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{\textcircled{2}} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + \dots + E_{\textcircled{n}} \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} \quad ; \quad (4.32)$$

$$I_{\textcircled{2}} = \frac{\Delta_{\textcircled{2}}}{\Delta} = E_{\textcircled{1}} \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + E_{\textcircled{2}} \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + \dots + E_{\textcircled{n}} \frac{\Delta_{2n}}{\Delta}; \quad (4.33)$$

$$I_{\textcircled{n}} = \frac{\Delta_{\textcircled{n}}}{\Delta_{\textcircled{1}}} = E_{\textcircled{1}} \frac{\Delta_{n1}}{\Delta_{\textcircled{1}}} + E_{\textcircled{2}} \frac{\Delta_{n2}}{\Delta_{\textcircled{1}}} + \dots + E_{\textcircled{n}} \frac{\Delta_{nn}}{\Delta_{\textcircled{1}}}.$$

4.7. Основные теоремы теории линейных цепей

1) Теорема наложения (принцип суперпозиции)

Слагаемые в выражении (4.32) можно рассматривать как частичные токи первого контура, созданные каждой из контурных ЭДС в отдельности. После подстановки в контурные ЭДС истинных источников и группировки слагаемых докажем принцип наложения, который заключается в следующем.

Ток в какой-либо ветви сложной цепи равен алгебраической сумме частичных токов, создаваемых в этой ветви каждым источником в отдельности.

При определении частичного тока от отдельного источника остальные источники заменяются своими внутренними сопротивлениями, т.е. источники идеальных ЭДС должны быть закорочены (их внутренние сопротивления равны нулю), а источники тока должны быть разомкнуты (их внутренние сопротивления бесконечно велики).

Приведем пример определения тока при помощи теоремы наложения.

Определим в схеме (рис. 4.31) ток I_3 , иллюстрируя расчет схемами. Таких схем должно быть столько, сколько источников в заданной схеме, в каждой из частичных схем нужно оставить один источник.

$$\begin{aligned} I_3' &= \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}; \\ I_3'' &= J \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3}; \\ I_3 &= I_3' - I_3''. \end{aligned}$$

Принцип наложения рационально использовать для расчета цепей в том случае, если при действии каждого источника в отдельности цепь является простой, т.е. последовательно–параллельной.

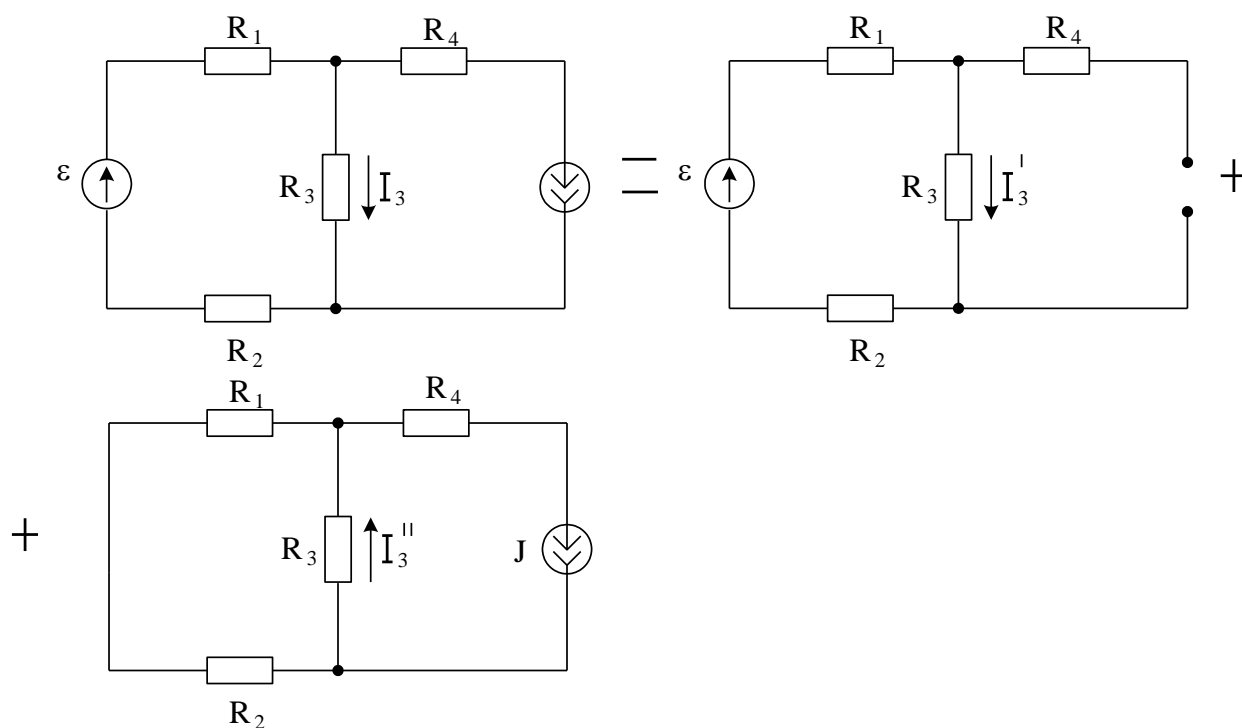


Рисунок 4.31

2) Теорема (принцип) взаимности

Сравним два слагаемых в (4.32) и (4.33) – $I_{\textcircled{1}}^{(2)}$ и $I_{\textcircled{2}}^{(1)}$

$$I_{\textcircled{1}}^{(2)} = E_{\textcircled{2}} \frac{\Delta_{12}}{\Delta}; \quad I_{\textcircled{2}}^{(1)} = E_{\textcircled{1}} \frac{\Delta_{21}}{\Delta}.$$

Поскольку $R_{kl} = R_{lk}$, то определитель Δ симметричен относительно главной диагонали, поэтому $\Delta_{12} = \Delta_{21}$. Следовательно,

$$\frac{I_{\textcircled{1}}^{(2)}}{I_{\textcircled{2}}^{(1)}} = \frac{E_{\textcircled{2}}}{E_{\textcircled{1}}}.$$

Если бы $E_{\textcircled{2}} = E_{\textcircled{1}}$, то и $I_{\textcircled{1}}^{(2)} = I_{\textcircled{2}}^{(1)}$.

Выделим в сколь угодно сложной цепи одну ветвь с ЭДС E_k и сопротивлением R_k . Вся остальная цепь пассивная, т.е. в ней нет источников. Выделим из пассивной части цепи ветвь с сопротивлением R_l . Пусть ЭДС E_k создает в ней ток $I_l^{(k)}$. Согласно принципу взаимности, если эту ЭДС поместить в l -тую ветвь, то она создаст в k -той ветви такой же ток, какой ранее протекал в l -той ветви (рис. 4.32).

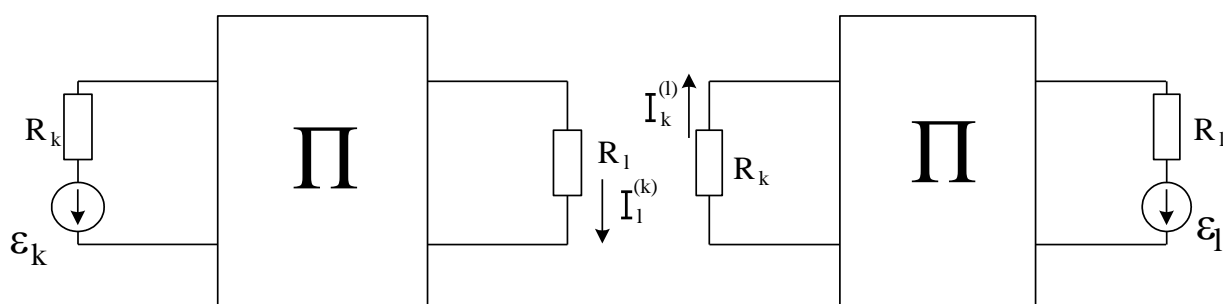


Рисунок 4.32

Если $E_k = E_l$, то $I_l^{(k)} = I_k^{(l)}$.

Принцип взаимности позволяет переносить ЭДС из одной ветви в другую, и определять ток второй ветви после переноса ЭДС в той ветви, где она находилась ранее.

Такая методика расчета рациональна в том случае, когда нужно определить один из токов в сложной цепи и после переноса ЭДС в ветвь с искомым током цепь становится простой.

Покажем методику применения принципа взаимности на примере (рис. 4.33). Пусть нужно определить ток I_5 в диагонали мостовой схемы, которая не является последовательно-параллельной и может быть рассчитана только методами расчета сложных цепей. Если перенести ЭДС в пятую ветвь, то относительно её зажимов цепь становится простой. Ток I_5 теперь нужно искать в той ветви, где ранее находилась ЭДС.

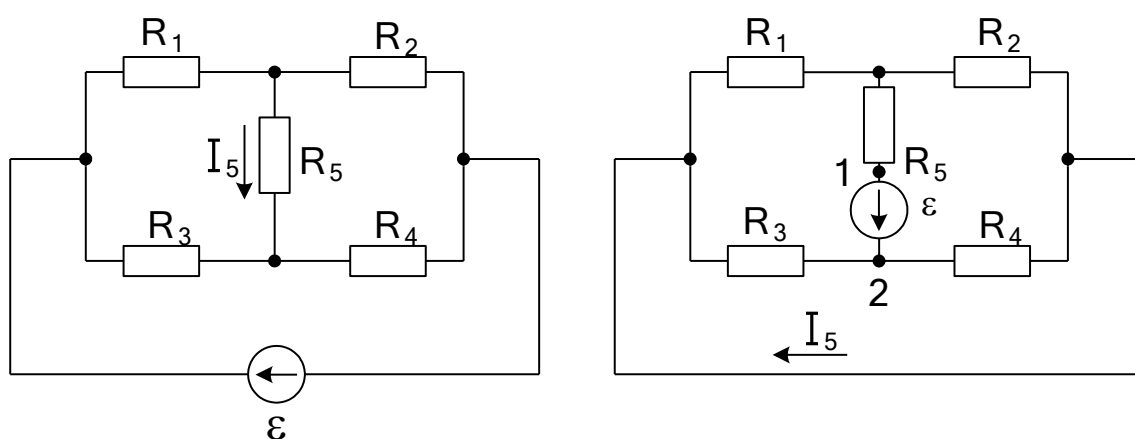


Рисунок 4.33

Развернем схему, полученную после переноса ЭДС, относительно зажимов ЭДС 1 и 2 (рис. 4.34).

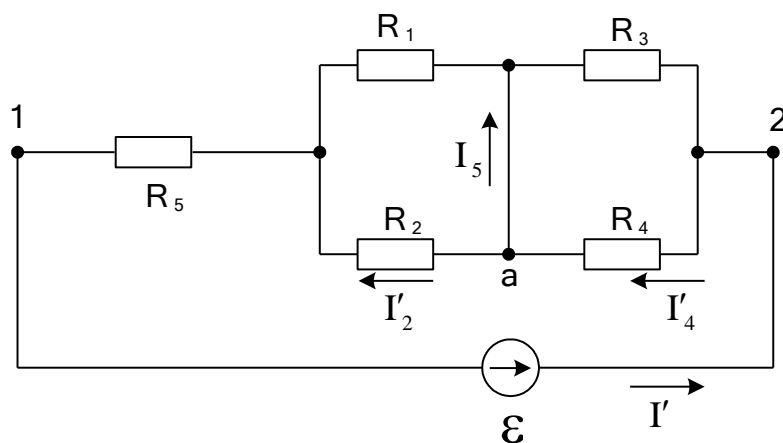


Рисунок 4.34

Обозначения I' , I'_4 , I'_2 подчёркивают, что из исходной схемы в схему с перенесенной ЭДС неизменным перешел только ток I_5 .

Для расчета полученной схемы найдем ее общее сопротивление относительно зажимов 1 и 2:

$$R_{\text{общ}} = R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Ток источника определяем по закону Ома:

$$I' = \frac{E}{R_{\text{общ}}}.$$

Токи в ветвях параллельных соединений – по формуле разброса токов:

$$I'_4 = I' \frac{R_3}{R_3 + R_4}; \quad I'_2 = I' \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

По первому закону Кирхгофа для узла a :

$$-I'_4 + I_5 + I'_2 = 0, \text{ откуда } I_5 = I'_4 - I'_2.$$

3) Теорема компенсации

Она заключается в том, что любое падение напряжения может быть скомпенсировано ЭДС, равной этому падению напряжения по величине и противоположной ему по направлению.

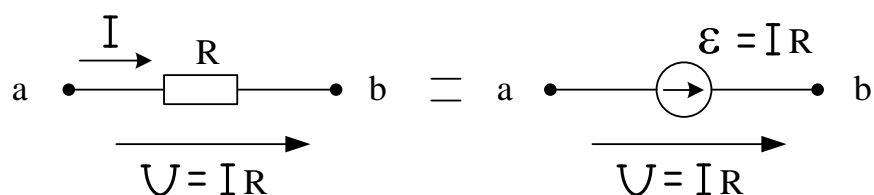


Рисунок 4. 35

4) Теорема об эквивалентном генераторе

Двухполюсником называется любая сколь угодно сложная цепь, имеющая два зажима (полюса). Если внутри двухполюсника есть источники, он называется активным, если источников нет – пассивным.

Любой активный двухполюсник можно рассматривать как реальный источник, для которого можно составить две эквивалентные схемы. Чаще всего используется схема с источником ЭДС. Поэтому теорема формулируется следующим образом.

Любой сколь угодно сложный активный двухполюсник можно представить эквивалентным генератором, ЭДС которого равна напряжению холостого хода на зажимах двухполюсника, а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению пассивного двухполюсника со стороны тех же зажимов (рис. 4.36).

При определении входного сопротивления все источники должны быть заменены своими внутренними сопротивлениями – источники ЭДС закорачиваются, а источники тока размыкаются.

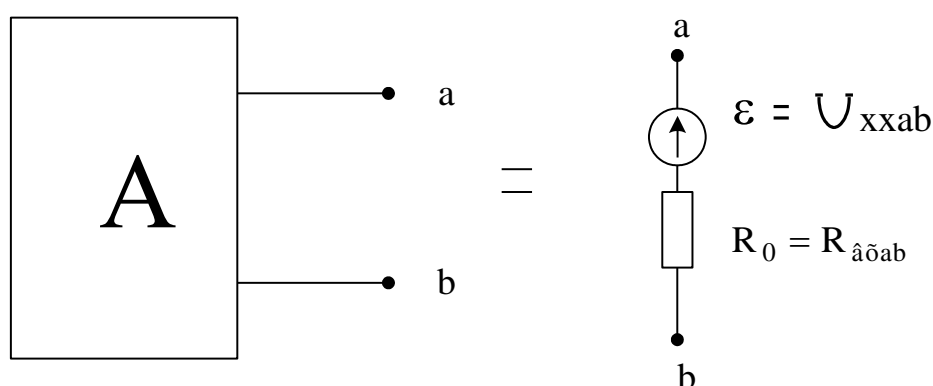


Рисунок 4.36

Входное сопротивление равно, как и у реального источника, отношению напряжения холостого хода к току короткого замыкания на зажимах двухполюсника:

$$R_{\text{вх}} = R_0 = \frac{U_{\text{xx}}}{I_{\text{кз}}},$$

однако при известной схеме двухполюсника проще определить входное сопротивление, чем ток короткого замыкания.

Подключим к двухполюснику нагрузку и определим ток в ней (рис. 4.37).

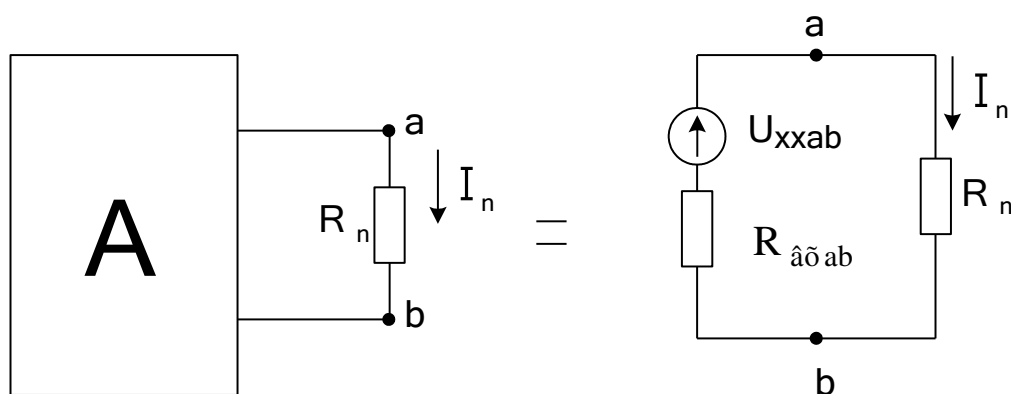


Рисунок 4.37

По закону Ома для полученной одноконтурной цепи можно записать:

$$I_n = \frac{U_{\text{xxab}}}{R_n + R_{\text{вхab}}}. \quad (4.34)$$

В таком виде теорема об эквивалентном генераторе называется также теоремой Тевенена.

Теорема позволяет рассчитать ток в одной ветви сложной цепи, не считывая всю цепь.

Приведем пример расчета цепи с помощью этой теоремы.

Определим ток в диагонали моста (рис. 4.38).

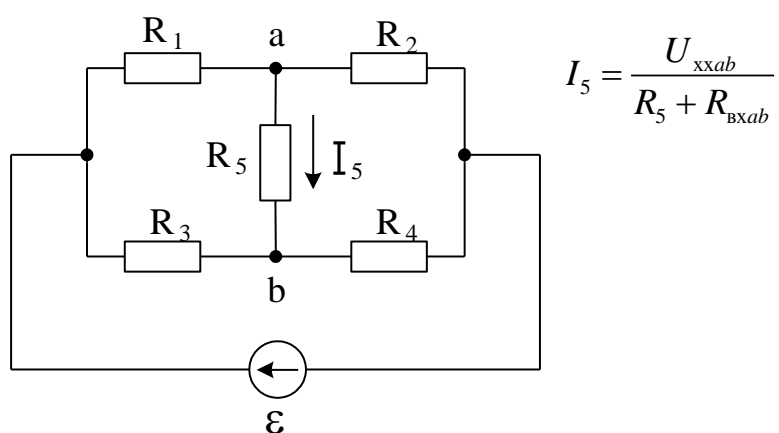


Рисунок 4.38

Рассмотрим режим холостого хода пятой ветви (рис. 4.39).

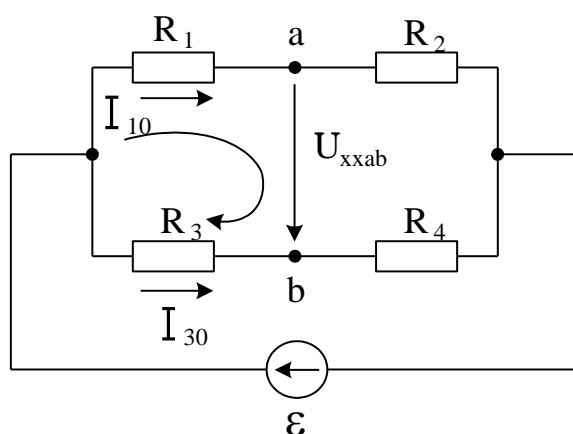


Рисунок 4.39

После размыкания пятой ветви все токи изменились, поэтому они обозначены I_{10} , I_{30} . По закону Ома запишем:

$$I_{10} = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}; \quad I_{30} = \frac{E}{R_3 + R_4}.$$

По второму закону Кирхгофа для контура, содержащего U_{xxab} , имеем:

$$R_1 I_{10} + U_{xxab} - I_{30} R_3 = 0,$$

откуда: $U_{xxab} = I_{30} R_3 - I_{10} R_1 = \varepsilon \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right).$

Напряжение U_{xxab} представляет собой падение напряжения $R_5 I_5$ при $R_5 \rightarrow \infty$, поэтому применение второго закона Кирхгофа вполне оправдано и для разомкнутого контура.

Определяем входное сопротивление (рис. 4.40).

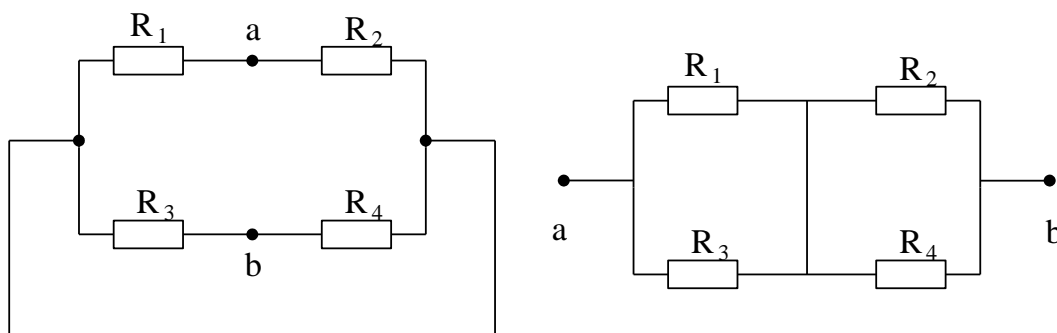


Рисунок 4.40

После разворачивания схемы относительно зажимов a и b очевидно,

что $R_{вх ab} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}.$

5) Теорема вариации

Эта теорема дает возможность определить изменение тока в данной ветви при изменении сопротивления этой же ветви (рис. 4.41).

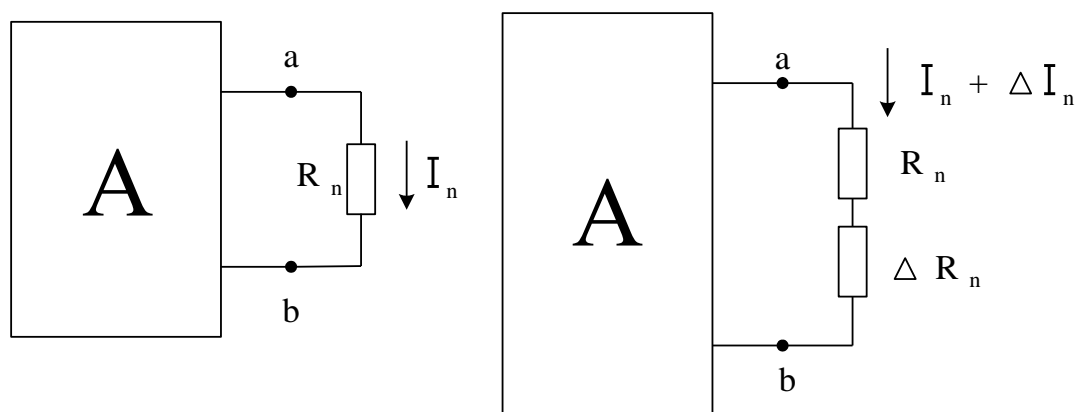


Рисунок 4.41

Без доказательства запишем теорему вариации:

$$\Delta I_n = - \frac{\Delta R_n \cdot I_n}{R_n + \Delta R_n + R_{\text{вх}ab}}. \quad (4.35)$$

Знак “минус” в выражении ΔI_n говорит о том, что изменения сопротивления и тока противоположны по знаку: при увеличении сопротивления ток уменьшается и наоборот.

4.8. Эквивалентные преобразования сложных электрических цепей

Как было указано выше, две схемы называются эквивалентными друг другу, если при замене одной схемы на другую не изменяются токи и напряжения во внешней части цепи.

Если две схемы эквивалентны друг другу, то их сопротивления относительно одинаковой пары зажимов в одном и том же режиме работы должны быть одинаковы.

Среди всех преобразований сложных цепей наиболее важное значение для практики имеют преобразования “треугольника” сопротивлений (Δ) в эквивалентную ему “звезду” сопротивлений (\star) и наоборот.

1) Преобразование “треугольника” сопротивлений в “звезду” сопротивлений (рис. 4.42):

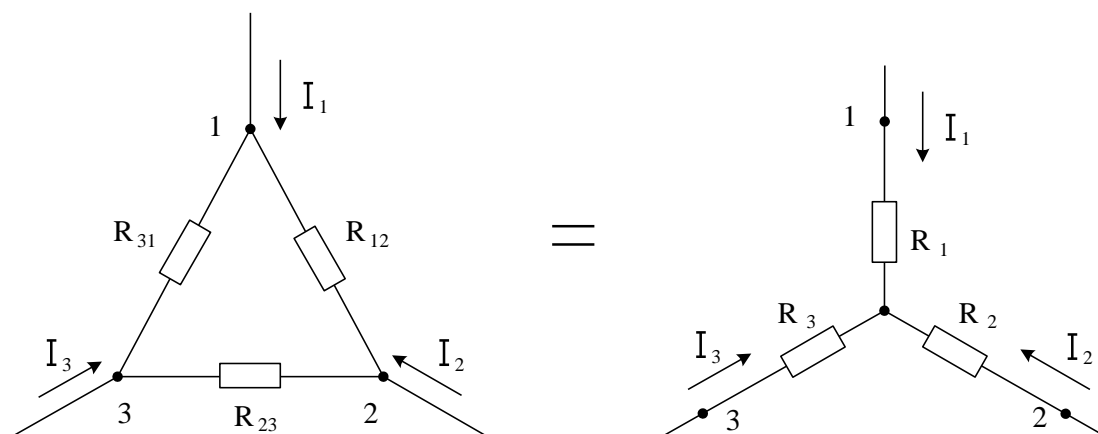


Рисунок 4.42

Рассмотрим поочередно режим обрыва проводов, подходящих к точкам 1, 2, 3 и приравняем в этих режимах сопротивления обеих схем:

$$I_1 = 0: \frac{(R_{12} + R_{31}) \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}} = R_2 + R_3; \quad (4.36)$$

$$I_2 = 0: \frac{(R_{12} + R_{23}) \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_3 + R_1; \quad (4.37)$$

$$I_3 = 0: \frac{(R_{23} + R_{31}) \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_1 + R_2. \quad (4.38)$$

Для определения R_1 сложим выражения (4.37) и (4.38) и вычтем выражение (4.36):

$$\frac{R_{12}R_{31} + R_{23}R_{31} + R_{12}R_{23} + R_{12}R_{31} - R_{12}R_{23} - R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = 2R_1,$$

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (4.39)$$

Аналогично можно получить:

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

2) Преобразование “звезды” сопротивлений в “треугольник” сопротивлений (рис. 4.43)

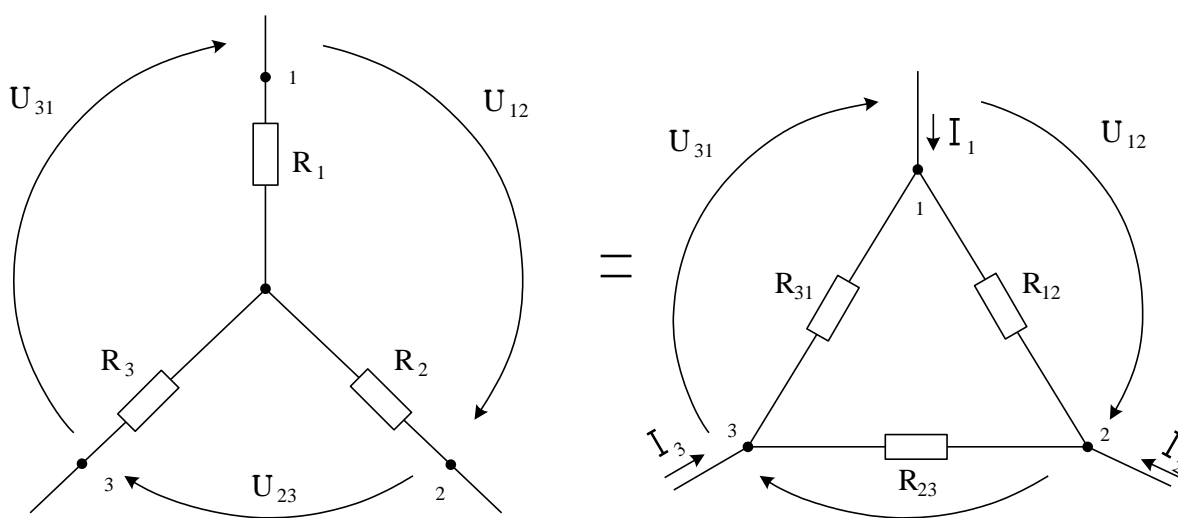


Рисунок 4.43

Приравняем сопротивления этих двух схем в режимах короткого замыкания каждой пары зажимов:

$$U_{12} = 0: R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{31} + R_{23}}.$$

Преобразуем: $\frac{R_3 R_1 + R_3 R_2 + R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{31} + R_{23}}.$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = \frac{R_{31} + R_{23}}{R_{31} \cdot R_{23}} = G_{31} + G_{23}. \quad (4.40)$$

По аналогии запишем:

$$U_{23} = 0: \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = G_{12} + G_{31}; \quad (4.41)$$

$$U_{31} = 0: \frac{R_3 + R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = G_{23} + G_{12}. \quad (4.42)$$

Для нахождения G_{12} сложим выражения (4.41) и (4.42) и вычтем выражение (4.40):

$$\frac{R_2 + R_3 + R_3 + R_1 - R_1 - R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = 2 \cdot G_{12},$$

$$\text{откуда: } G_{12} = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}.$$

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_1 R_3}{R_2}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Метод расчета цепей, основанный на преобразовании “треугольника” сопротивлений в “звезду” сопротивлений и наоборот, называется методом трансфигурации.

Приведем пример его применения. Пусть в схеме моста нужно определить ток в резисторе R_1 . Для упрощения схемы преобразуем “треугольник” сопротивлений между точками a , b , c в эквивалентную ему “звезду”.

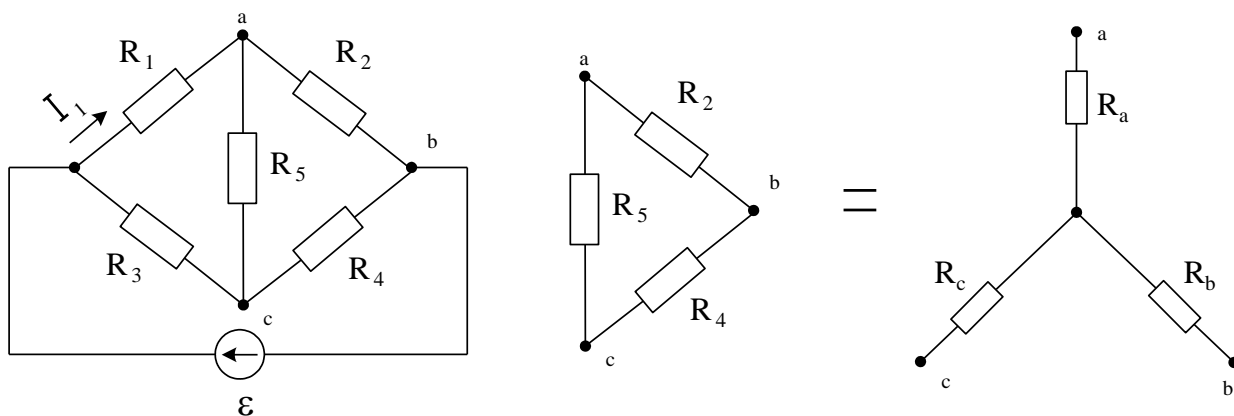


Рисунок 4.44

Согласно полученным выше формулам преобразования, запишем:

$$R_a = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5}; \quad R_b = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R_5}; \quad R_c = \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5}.$$

В результате преобразований схема примет следующий вид (рис. 4.45):

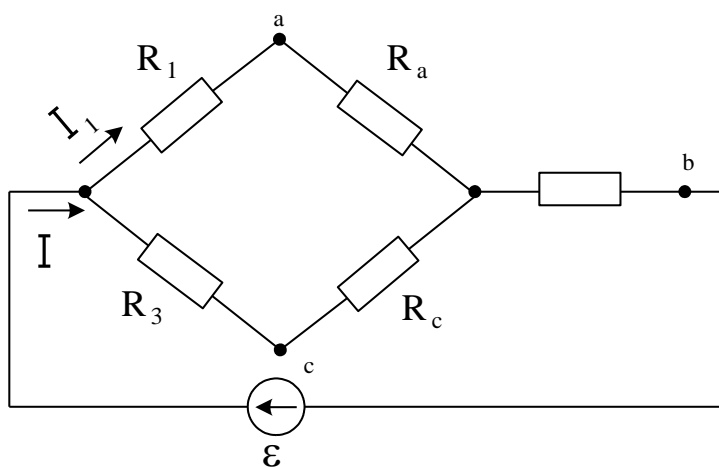


Рисунок 4.45

Общее сопротивление схемы:

$$R_{\text{общ}} = \frac{(R_1 + R_a)(R_3 + R_c)}{R_1 + R_a + R_3 + R_c} + R_g.$$

Общий ток по закону Ома:

$$I = \frac{E}{R_{\text{общ}}}.$$

По формуле разброса определим I_1 :

$$I_1 = I \cdot \frac{(R_3 + R_c)}{R_1 + R_a + R_3 + R_c}.$$

Преобразование “треугольника” сопротивлений в “звезду” сопротивлений или наоборот могут быть в некоторых случаях необходимы для определения $R_{\text{вх}}$ при применении теоремы об эквивалентном генераторе.

4.9. Передача мощности от активного двухполюсника к пассивному

Изучение этого вопроса имеет важное значение для правильного выбора режима работы различных электротехнических устройств.

Поскольку любой активный двухполюсник может быть представлен эквивалентным генератором с ЭДС и внутренним сопротивлением, а любой пассивный двухполюсник может быть заменен своим входным сопротивлением, то для исследования вопроса о передаче мощности вполне достаточно рассмотреть эквивалентную схему (рис. 4.46).

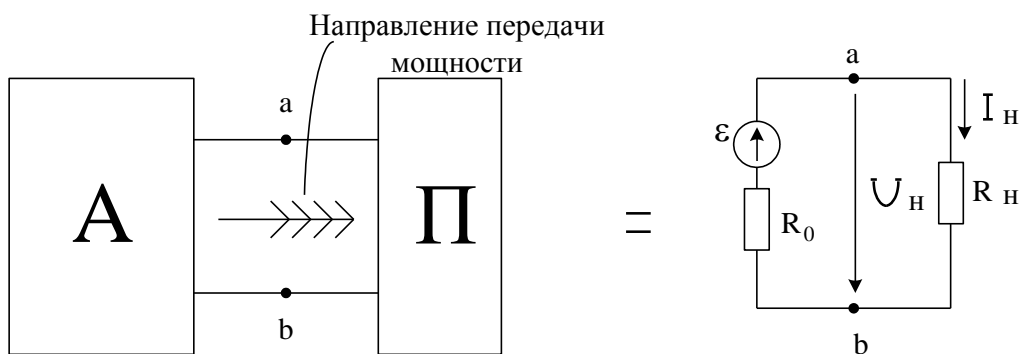


Рисунок 4.46

По закону Ома для эквивалентной схемы

$$I_H = \frac{E}{R_0 + R_H}. \quad (4.44)$$

Здесь R_0 , E - параметры эквивалентного генератора, R_H , I_H , U_H – сопротивление, ток и напряжение нагрузки.

Выразим напряжение на нагрузке:

$$U_H = I_H R_H = E - I_H R_0 \quad (4.45)$$

При изменении сопротивления нагрузки от бесконечности до нуля напряжение U_H также изменяется между такими двумя крайними режимами:

1) Режим холостого хода при $R_H = \infty$; в этом режиме $I_H = 0$; $U_H = U_{xx} = E$.

2) Режим короткого замыкания при $R_H = 0$; в этом режиме $U_H = 0$, а ток

достигает наибольшего значения $I_H = I_{кз} = \frac{E}{R_0}$.

Перейдем к вопросу о передаче мощности.

Обозначим:

$P_{\text{выр}} = E \cdot I_H$ – мощность, вырабатываемая активным двухполюсником;

$P_{\text{потерь}} = R_0 \cdot I_H^2$ – мощность потерь внутри активного двухполюсника;

$P_{\text{нагр}} = U_H \cdot I_H$ – полезная мощность, передаваемая от активного двухполюсника к нагрузке.

Уравнение баланса мощностей получим, умножая уравнение (4.45) на величину тока:

$$P_{\text{нагр}} = P_{\text{выр}} - P_{\text{потерь}} = EI_{\text{н}} - R_0 \cdot I_{\text{н}}^2. \quad (4.46)$$

Исследуем функцию (2.46) на экстремум:

$$\frac{dP_{\text{нагр}}}{dI_{\text{н}}} = E - 2R_0 I_{\text{н}} = 0.$$

Следовательно, величина тока, при котором мощность, передаваемая нагрузке, максимальна, равна:

$$I_{\text{н}} \big|_{P_{\text{нагр макс}}} = \frac{E}{2R_0} = \frac{1}{2} I_{\text{кз}}. \quad (4.47)$$

Сравнивая выражения (4.47) и (4.44), можно сделать вывод, что максимальная мощность, передаваемая в нагрузку, достигается при $R_{\text{н}} = R_0$; такой режим называется режимом согласованной нагрузки.

$$P_{\text{нагр макс}} = R_0 \cdot \left(\frac{E}{2R_0} \right)^2 = \frac{E^2}{4R_0}.$$

Найдем КПД передачи мощности:

$$\eta = \frac{P_{\text{нагр}}}{P_{\text{выр}}} = \frac{U_{\text{н}} I_{\text{н}}}{EI_{\text{н}}} = \frac{R_{\text{н}} I_{\text{н}}^2}{(R_0 + R_{\text{н}}) I_{\text{н}}^2} = \frac{R_{\text{н}}}{R_0 + R_{\text{н}}}.$$

Вычислим КПД в различных режимах работы:

Режим холостого хода: $R_{\text{н}} \rightarrow \infty$; $\eta \rightarrow 1$.

Режим согласованной нагрузки: $R_{\text{н}} = R_0$; $\eta = 0,5$.

Режим короткого замыкания: $R_{\text{н}} = 0$; $\eta = 0$.

Построим графики изменения величин (рис.4.47). График $U_{\text{н}} = f(I_{\text{н}})$ – прямая, соединяющая точки $U_{\text{хх}}$ и $I_{\text{кз}}$, поскольку цепь линейная. Зависимость $P_{\text{выр}} = f(I_{\text{н}})$ также линейная, т.к. $E = \text{const}$. Прямая соединяет точки 0 и

$E I_{\text{кз}} = \frac{E^2}{R_0} = P_{\text{выр. к.з.}}$. Зависимость $P_{\text{потерь}} = f(I_{\text{н}})$ представляет собой параболу, опирающуюся на прямую $P_{\text{выр.}}$, поскольку при холостом ходе $P_{\text{потерь}} = 0$, а при коротком замыкании $P_{\text{потерь}} = R_0 \cdot \left(\frac{E}{R_0}\right)^2 = \frac{E^2}{R_0} = P_{\text{выр. к.з.}}$.

$P_{\text{нагр}} = P_{\text{выр.}} - P_{\text{потерь}}$ – так же парабола, но имеющая нулевые значения при холостом ходе и коротком замыкании и максимальная при $I_{\text{н}} = \frac{1}{2} I_{\text{кз}}$.

График изменения η – прямая, соединяющая точки 1 при холостом ходе, 0,5 при токе $\frac{1}{2} I_{\text{кз}}$, 0 при $I_{\text{кз}}$.

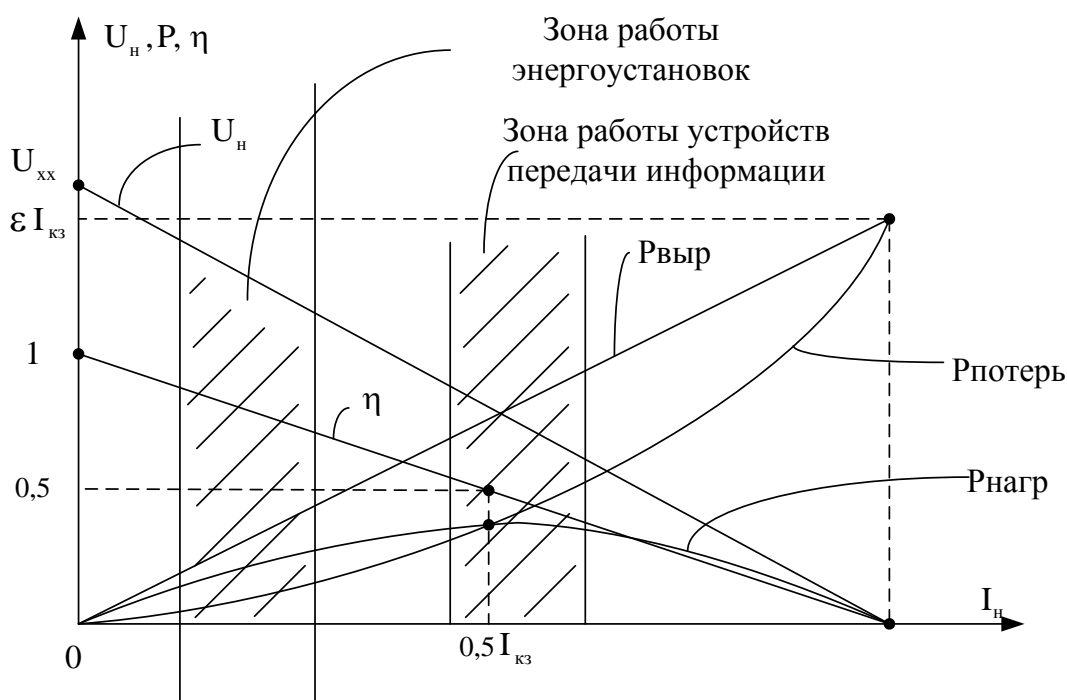


Рисунок 4.47

Если речь идет о передаче мощности в энергетической установке, то из экономических соображений нельзя допустить низкого КПД передачи мощ-

ности, поэтому зона рациональной работы энергетических установок должна находиться вблизи режима холостого хода, где η близок к 1.

Для установок передачи информации важно получить максимальную выходную мощность при $\eta = 0,5$.

5. Линейные электрические цепи переменного тока

5.1. Физические явления, возникающие в переменных электромагнитных полях

1) Явления в переменном магнитном поле

Мы уже говорили о том, что каждый контур при наличии в нем тока создаёт собственное потокоцепление, в том числе и при переменном токе i . Это потокоцепление называют потокоцеплением самоиндукции:

$$\Psi_L = Li.$$

Если ток i изменяется во времени, то в контуре, согласно закону электромагнитной индукции, возникает ЭДС самоиндукции:

$$e_L = -\frac{d\Psi_L}{dt} = -L\frac{di}{dt} \quad (5.1)$$

Знак “-” в этом выражении означает, что ЭДС всегда направлена таким образом, чтобы своим действием препятствовать изменению потокоцепления и тока. Если ток убывает, то ЭДС стремится его поддержать, т.е. совпадает, по направлению с током, а если ток возрастает, то ЭДС направлена против тока.

Для того чтобы создать в цепи переменный ток и поддерживать его, источник должен преодолевать ЭДС самоиндукции, вырабатывая напряжение, равное ЭДС по величине и противоположное ей по направлению:

$$u_L = -e_L = L\frac{di}{dt}. \quad (5.2)$$

Индуктивность в цепи переменного тока изображается так (рис. 5.1):

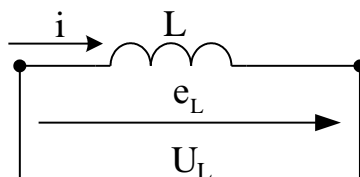


Рисунок 5.1

При протекании переменного тока в цепи с индуктивностью непрерывно меняется энергия магнитного поля пропорционально квадрату тока:

$$W_m = \frac{Li^2}{2}. \quad (5.3)$$

2) Явления в переменном электрическом поле

Как известно, диэлектрик содержит ничтожное количество свободных зарядов, и током проводимости в нем можно пренебречь. Поэтому конденсатор в цепи постоянного тока представляет собою разрыв цепи, т.е. не пропускает постоянного тока.

Но если напряжение на конденсаторе будет изменяться во времени, то конденсатор будет пропускать ток (рис. 5.2), но это не ток проводимости. Этот ток имеет другую физическую природу. Он обусловлен незначительным смещением связанных зарядов диэлектрика при изменении электрического поля в конденсаторе. Этот ток называется током смещения.

Известно что $i = \frac{dQ}{dt}$, $Q = cu_c$. Поэтому

$$i_c = c \frac{du_c}{dt}. \quad (5.4)$$

Наоборот,

$$u_c = \frac{1}{c} \int i_c dt. \quad (5.5)$$

Ток смещения возникает не только в диэлектрике, но и в вакууме при изменении электрического поля. Вообще, любое изменение электрического поля во времени равноценно электрическому току, поскольку оно, как и ток проводимости, создаёт магнитное поле.

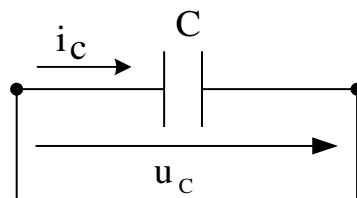


Рисунок 5.2

При изменении напряжения между обкладками конденсатора энергия электрического поля непрерывно изменяется пропорционально квадрату этого напряжения:

$$W_e = \frac{cu_c^2}{2}. \quad (5.6)$$

5.2. Синусоидальные электрические величины

Электромагнитный процесс в электрической цепи называется периодическим, если значения токов и напряжений повторяются через равные промежутки времени. Время, через которое повторяются мгновенные значения величин, называется периодом T .

$$f(t \pm kT) = f(t). \quad (5.7)$$

Величина, обратная периоду, называется частотой.

$$f = \frac{1}{T}, \quad (5.8)$$

$$[T] = \text{с}; \quad [f] = \text{с}^{-1} = \text{Гц}.$$

Наиболее распространенным и важным видом периодических токов и напряжений являются синусоидальные (гармонические) токи и напряжения.

Мгновенное значение синусоидального тока записывается следующим образом:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (5.9)$$

где I_m – амплитуда, или максимальное значение тока; ω – угловая или циклическая частота;

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad (5.10)$$

$$\omega t + \psi_i - \text{фаза}; [\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}; \psi_i - \text{начальная фаза}, \quad [\psi_i] = \text{рад (или градус)}.$$

Аналогично записываются мгновенные значения других синусоидальных функций времени.

Для построения графиков обычно используют основные значения синуса. При $\psi_i \neq 0$ начинают построение с величин $\omega t_0 = -\psi_i$, т.е. при $\psi_i > 0$ график смещается влево от начала координат, а при $\psi_i < 0$ – вправо на величину $|\psi_i|$ (рис. 5.3).

Разность начальных фаз двух синусоидальных функций одной частоты называется сдвигом их по фазе. Если $\psi_1 - \psi_2 = 0$, синусоиды совпадают по фазе, а если $\psi_1 - \psi_2 = \pm\pi$, они находятся в противофазе.

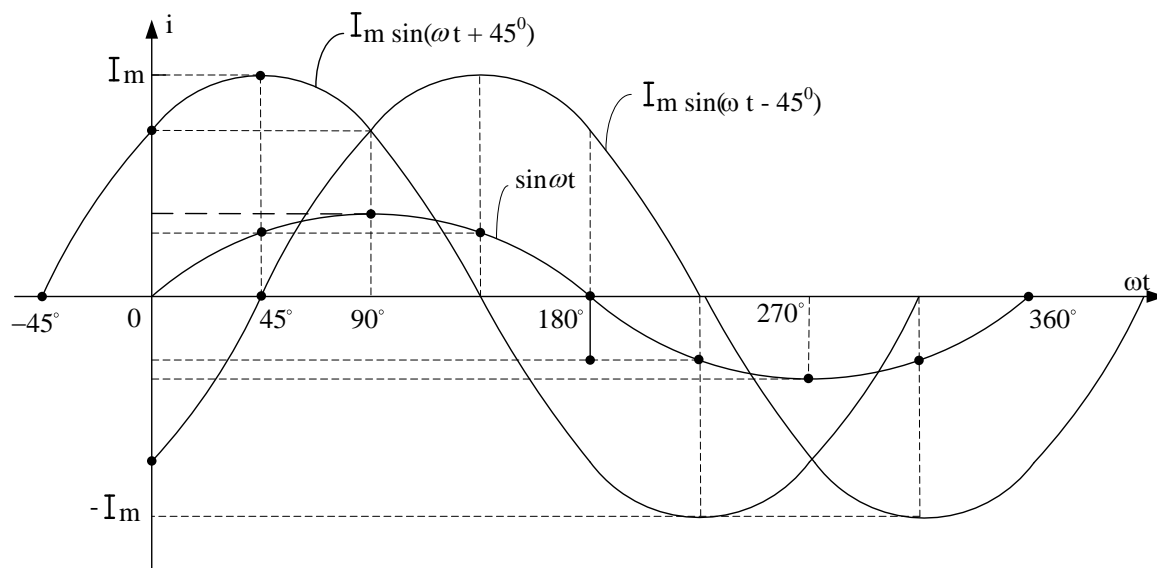


Рисунок 5.3

5.3. Действующее значение гармонического тока

Действующим значением переменного периодического тока называется такой постоянный ток, который выделяет за один период в данном резисторе такое же количество тепла, как и переменный ток.

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2 dt;$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (5.11)$$

С точки зрения математики, действующее значение тока представляет собой среднеквадратичное значение тока за период. Возведем обе части (5.11) в квадрат:

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) dt = \frac{I_m^2}{2T} \int_0^T [1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)] dt =$$

$$= \frac{I_m^2}{2T} \cdot t \Big|_0^T = \frac{I_m^2}{2}. \quad (5.12)$$

Интеграл за период от гармонической функции $\cos 2(\omega t + \psi_i)$ равен нулю. Таким образом,

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad (5.13)$$

$$1/\sqrt{2} \approx 0,707.$$

Аналогичным образом вычисляются действующие значения других синусоидальных величин – напряжений, ЭДС, магнитных потоков и др.

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Действующее значение – очень важная величина, определяющая силовое и тепловое действие тока. Приборы электромагнитной системы показывают действующее значение тока и имеют неравномерную (квадратичную) шкалу.

5.4. Среднее значение синусоидального тока

Из математики известно, что:

$$f_{\text{cp}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Геометрический смысл – высота прямоугольника с основанием $t_2 - t_1$, равновеликого по площади данной кривой.

Для синусоидальной функции среднее значение зависит от интервала интегрирования. За период среднее значение равно нулю, а за положительный полупериод оно максимально. Это максимально возможное среднее значение и называют средним значением гармонического тока (рис. 5.4).

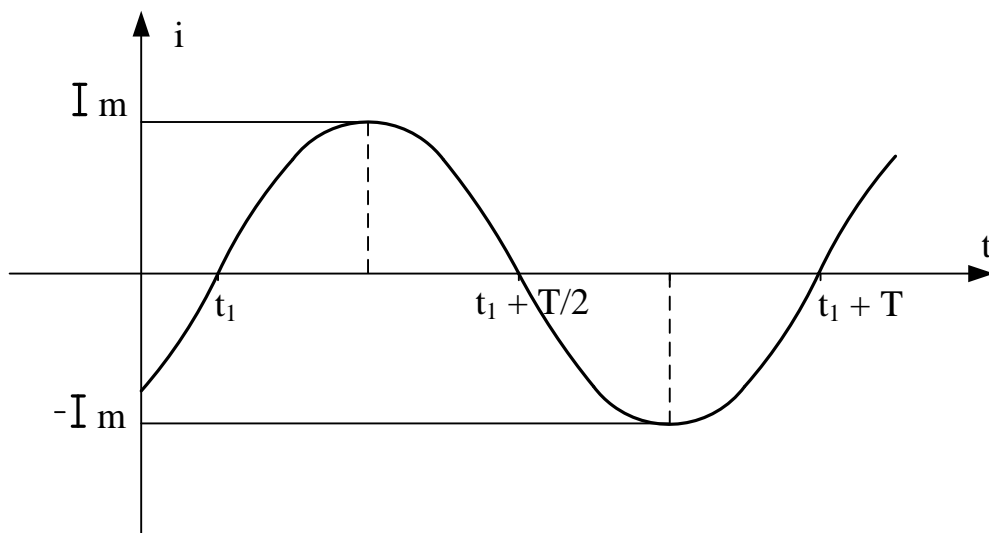


Рисунок 5.4

$$\begin{aligned}
 I_{\text{ср}} &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1 + \frac{T}{2}} I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{I_m}{\omega} \cdot [-\cos(\omega t + \psi_i)] \Big|_{t_1}^{t_1 + \frac{T}{2}} = \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \frac{I_m T}{2\pi} [1 - (-1)] = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m.
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Аналогично $U_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} U_m$; $E_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} \cdot E_m$.

5.5. Коэффициенты, характеризующие форму кривой

1) Коэффициент амплитуды: $k_a = \frac{I_m}{I}$; для синусоидального тока $k_a = \sqrt{2}$.

2) Коэффициент формы: $k_f = \frac{I}{I_{\text{н\ddot{o}}}}$

Для синусоидального тока $k_f = \frac{I_m \cdot \pi}{\sqrt{2} \cdot 2 I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$

5.6. Изображение синусоидальных функций времени вращающимися векторами

Если взять вектор длиной I_m под углом ψ_i к горизонтальной оси, которая служит осью отсчёта углов (рис. 5.5), и привести вектор во вращение с угловой скоростью ω , то через некоторое время t угол между вектором и горизонтальной осью станет равным $\omega t + \psi_i$, а проекция вектора на вертикальную ось будет равна мгновенному значению тока i . Таким образом, проекция вращающегося вектора на вертикальную ось в любой момент времени дает мгновенное значение синусоидальной функции времени.

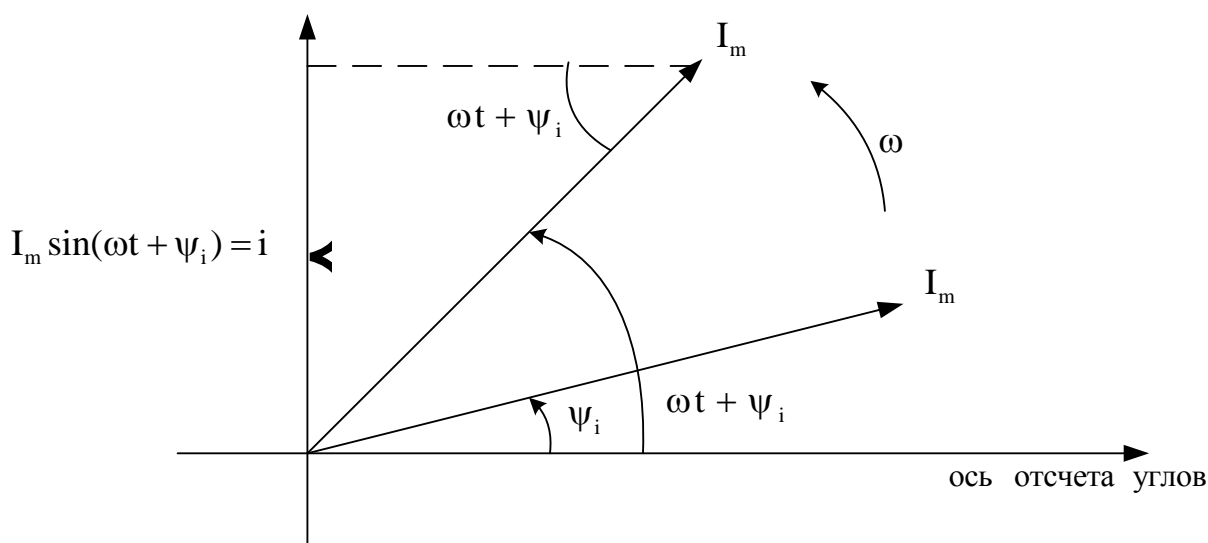


Рисунок 5.5

Положительное направление вращения и отсчета углов – против часовой стрелки.

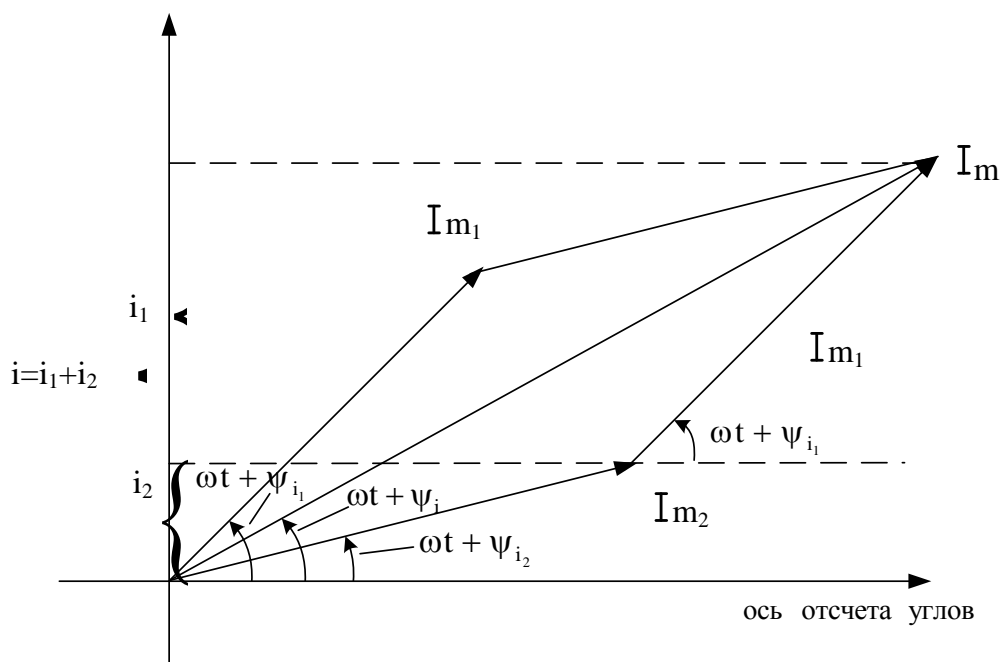


Рисунок 5.6

Если два тока изменяются с одинаковой частотой, то изображающие их векторы по отношению друг к другу остаются неподвижными, и чтобы найти их сумму, достаточно геометрически сложить изображающие их векторы в любой момент времени (рис. 5.6). В то же время аналитическое сложение синусоидальных функций с различными амплитудами и фазами очень трудоёмко. Совокупность векторов, изображающих токи и напряжения какой-либо цепи в определённом порядке, называют векторной диаграммой. Поскольку в одной и той же цепи все токи и напряжения изменяются с одной и той же угловой частотой ω , то на плоскости соответствующие им векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью ω и, следовательно, неподвижны друг относительно друга. Поэтому в дальнейшем мы не будем показывать ось отсчёта углов и будем считать векторы на векторных диаграммах неподвижными.

5.7. Понятие о цепях с сосредоточенными и распределёнными параметрами. Понятие о квазистационарных токах

Электрическая цепь, в которой электрические сопротивления и проводимости, индуктивности и ёмкости распределены вдоль цепи, а следовательно, и различные виды энергии - тепловая, магнитная и электрическая - присутствуют на каждом участке, называется цепью с распределёнными параметрами.

Однако, равномерное распределение электрического и магнитного полей наблюдается довольно редко, например, в линиях электропередачи.

Значительно чаще на каждом участке преобладает один вид энергии: в конденсаторах - электрическая, в индуктивных катушках - магнитная, в резисторах - тепловая. Такие цепи называют цепями с сосредоточенными параметрами.

Переменные токи считаются медленно изменяющимися, или квазистационарными, если с достаточной точностью можно считать, что магнитное поле этих токов в любой точке цепи в каждый момент времени соответствует мгновенному значению этого тока.

Дело в том, что электромагнитное поле распространяется в пространстве с большой, но конечной скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}.$$

В частности, для вакуума (и воздуха) эта скорость равна скорости света:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}.$$

Поэтому переменные токи можно считать квазистационарными лишь в ограниченной области поля; эта область определяется как расстояние, на которое распространяется электромагнитное поле за время изменения тока на 1% своего максимального значения. Ток изменяется с наибольшей скоростью в момент прохождения через нулевое значение.

$$0,01 I_m = I_m \sin \omega t_0,$$

где t_0 - время изменения тока на 1% I_m ; $\omega t_0 = \arcsin 0,01 = 0,01$;

$$t_0 = \frac{0,01}{\omega} = \frac{0,01T}{2\pi}.$$

За это время электромагнитное поле распространяется на расстояние: $\ell_0 = vt_0 = 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{0,01T}{2\pi} = \frac{3 \cdot 10^6}{2\pi f} (\text{м}) = \frac{3 \cdot 10^3}{2\pi f} (\text{км}).$

В частности, при промышленной частоте 50Гц

$$\ell_0 = \frac{60}{2\pi} \approx 9,5 \text{ км}.$$

Таким образом, если исключить из рассмотрения линии электропередачи, то при промышленной частоте электрические цепи, размеры которых не

превышают 9,5 км, можно считать цепями с сосредоточенными параметрами, а токи в них - квазистационарными.

5.8. Дифференциально-интегральное уравнение элементарной цепи переменного тока

Элементарной цепью называется цепь, элементы которой обладают всеми видами энергии (рис. 5.7).

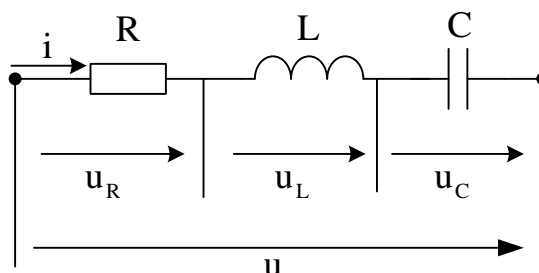


Рисунок 5.7

На основании закона сохранения энергии запишем:

$$dW_{\text{ист}} = dW_T + dW_m + dW_e. \quad (5.15)$$

$dW_{\text{ист}} = u i dt$ - приращение энергии источника.

$dW_T = R i^2 dt$ - приращение тепловой энергии резистора.

Энергия магнитного поля $W_m = \frac{L i^2}{2}$; $dW_m = L i di$ - её приращение.

Энергия электрического поля $W_e = \frac{C u_c^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$, её приращение

$$dW_e = \frac{1}{C} q dq.$$

Поскольку $i = \frac{dq}{dt}$, то $dq = i dt$; $q = \int i dt$, поэтому $dW_e = \frac{1}{C} i dt \cdot \int i dt$.

Подставляем в (5.15) все приращения энергий:

$$u i dt = R i^2 dt + L i di + \frac{1}{C} i dt \cdot \int i dt. \quad (5.16)$$

Разделим в (5.16) обе части на $i dt$. Получим:

$$u = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (5.17)$$

Приложенное к цепи напряжение расходуется на падение напряжения на резисторе, на преодоление ЭДС самоиндукции в катушке индуктивности и на поддержание напряжения на конденсаторе.

$$u_R = Ri; u_L = L \frac{di}{dT}; u_C = \frac{1}{C} \int idt; \quad (5.17a)$$

$$u = u_R + u_L + u_C.$$

5.9. Закон Ома для амплитудных и действующих значений в цепи переменного тока

Рассмотрим элементарную цепь (рис. 5.7). Ее уравнение (5.17):

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt.$$

Найдем решение этого уравнения при условии, что

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Будем рассматривать только частное решение уравнения с правой частью, т.к. общее решение с течением времени затухает и будет рассмотрено в разделе "Переходные процессы".

Поскольку цепь линейная, то при синусоидальном напряжении в установившемся режиме ток также будет синусоидален:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Найдём напряжение на участках цепи.

$$u_R = Ri = RI_m \sin(\omega t + \psi_i). \quad (5.18)$$

Напряжение на резисторе по фазе совпадает с током.

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI_m \cos(\omega t + \psi_i) = \omega LI_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.19)$$

Напряжение на индуктивности по фазе опережает ток на угол $\frac{\pi}{2}$.

$$u_C = \frac{1}{C} \int idt = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.20)$$

Напряжение на конденсаторе отстаёт от тока по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$.

Сложим напряжения с помощью векторной диаграммы (рис. 5.8) в соответствии с уравнением

$$u_R + u_L + u_C = u.$$

Угол $+\frac{\pi}{2}$ откладываем от тока против часовой стрелки, а $-\frac{\pi}{2}$ - от тока по часовой стрелке.

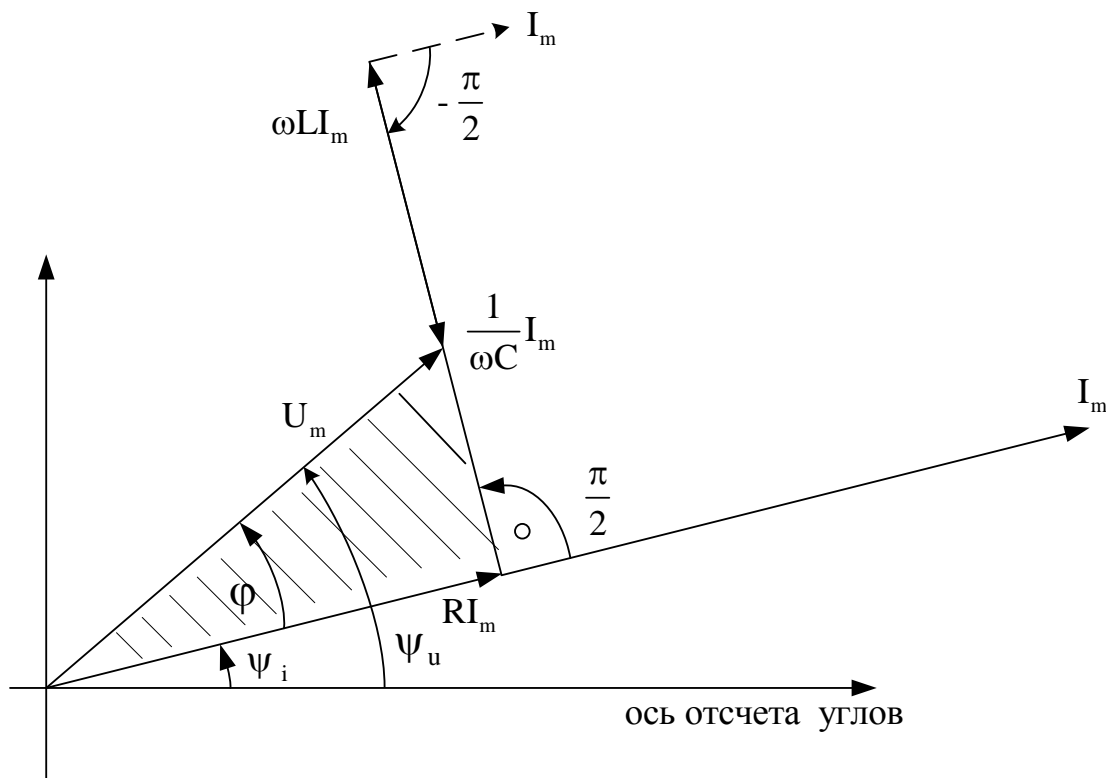


Рисунок 5.8

Из прямоугольного треугольника: $(RI_m)^2 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \right]^2 = U_m^2.$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} - \text{закон Ома для амплитуд.} \quad (5.21)$$

Введем обозначения:

$X_L = \omega L$ - индуктивное сопротивление;

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ - ёмкостное сопротивление;

$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ - реактивное сопротивление; (5.22)

R - активное сопротивление;

$$z = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ - полное сопротивление цепи переменного тока.} \quad (5.23)$$

Тогда закон Ома для амплитудных значений запишется следующим образом:

$$I_m = \frac{U_m}{z}. \quad (5.21a)$$

После деления обеих частей на $\sqrt{2}$ перейдем к действующим значениям:

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = I; \quad \frac{U_m}{\sqrt{2}} = U; \quad I = \frac{U}{z}. \quad (5.24)$$

Это закон Ома для действующих значений.

Из того же прямоугольного треугольника найдём угол сдвига фаз между током и напряжением:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i; \quad \varphi = \arctg \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m}{R I_m} = \arctg \frac{X}{R}; \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}. \quad (5.25)$$

Если $X = 0$, то $\varphi = 0$ - ток совпадает по фазе с напряжением; цепь имеет активный характер.

Если $X > 0$, то $\varphi > 0$ - напряжение опережает ток, или ток отстает от напряжения по фазе; цепь носит индуктивный характер.

Если $X < 0$, то $\varphi < 0$ - напряжение отстает от тока, или ток опережает напряжение по фазе; цепь носит ёмкостный характер.

Угол сдвига фаз φ в простой цепи находится в следующих пределах: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

5.10. Треугольник напряжений

Пусть в какой-либо цепи ток отстает от напряжения на угол φ . Нарисуем векторную диаграмму (рис. 5.9).

Разложим напряжение на 2 составляющих и получим треугольник напряжений. Составляющая напряжения U_a , совпадающая с током по фазе, называется активной составляющей. Она определяет, какая часть напряжения расходуется на выделение тепла. Составляющая U_p , сдвинутая относительно тока по фазе на $\pm 90^\circ$, называется реактивной и определяет интенсивность преобразования энергии источника в электромагнитную энергию полей.

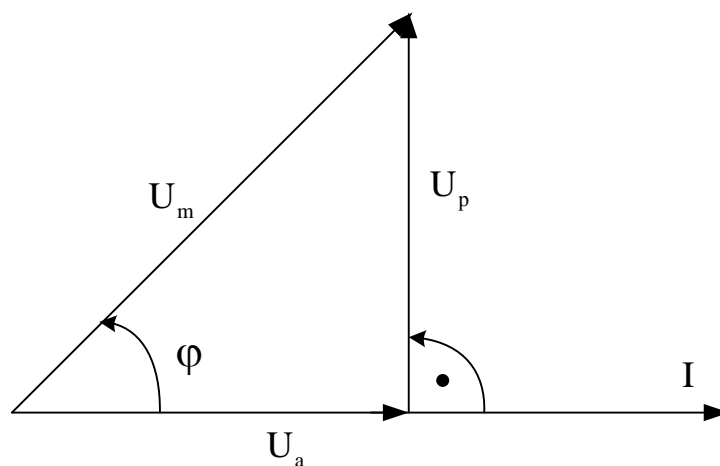


Рисунок 5.9

$$U_a = U \cos \varphi = RI, \quad U_p = U \sin \varphi = XI, \quad U = zI; \quad U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{U_p}{U_a}. \quad (5.26)$$

Эти соотношения вытекают из треугольника напряжений.

5.11. Треугольник сопротивлений

Разделим все стороны треугольника напряжений на величину тока и получим подобный ему треугольник сопротивлений (рис. 5.10). Из этого треугольника вытекают важные соотношения:

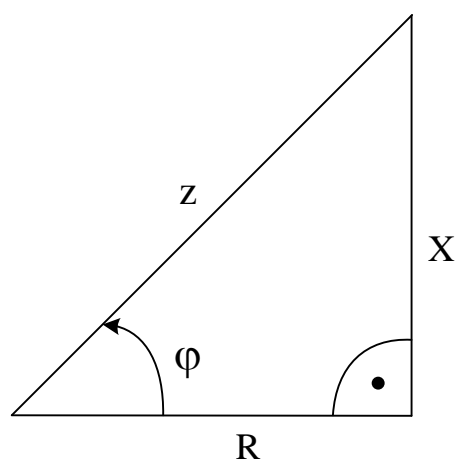


Рисунок 5.10

$$R = z \cos \varphi; X = z \sin \varphi.$$

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}; \varphi = \arctg \frac{X}{R}. \quad (5.27)$$

5.12. Треугольник токов

Разложим на векторной диаграмме вектор тока на 2 составляющих и получим треугольник токов. Угол φ снова выбран положительным, хотя его знак не имеет значения (рис. 5.11).

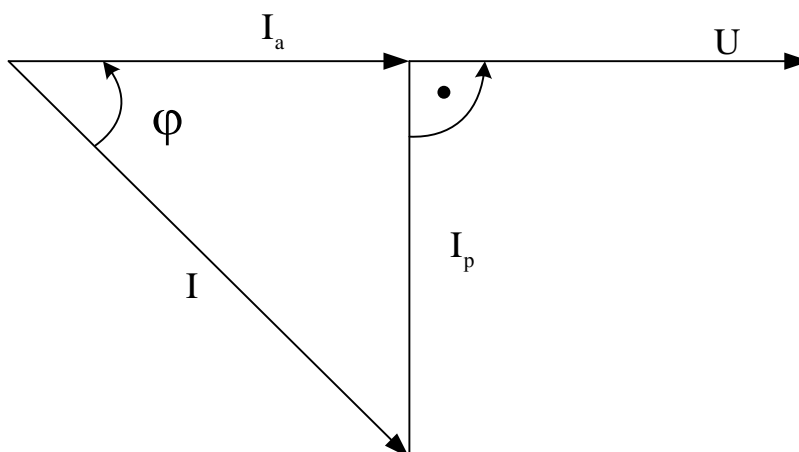


Рисунок 5.11

Активная составляющая тока I_a , совпадающая по фазе с напряжением, имеет такой же смысл, как и активная составляющая напряжения. Она пропорциональна напряжению: $I_a = I \cos \varphi = UG$, где G - активная проводимость. Реактивная составляющая I_p , сдвинутая по фазе относительно напряжения на угол $\pm 90^\circ$, также пропорциональна напряжению: $I_p = I \sin \varphi = UB$, где B - реактивная проводимость.

Кроме того, $I = \frac{U}{z} = Uy$, где $y = \frac{1}{z}$ - полная проводимость. Из треугольника токов вытекают также соотношения:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}; \varphi = \arctg \frac{I_p}{I_a}. \quad (5.28)$$

5.13. Треугольник проводимостей

Разделим все стороны треугольника токов на величину напряжения и получим подобный ему треугольник проводимостей (рис. 5.12). Из треугольника проводимостей вытекают следующие взаимосвязи:

$$G = y \cos \varphi; B = y \sin \varphi; y = \sqrt{G^2 + B^2}, \varphi = \arctg \frac{B}{G}. \quad (5.29)$$

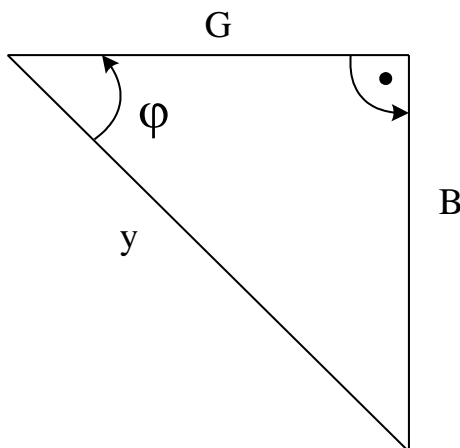


Рисунок 5.12

5.14. Связи между сопротивлениями и проводимостями в цепи переменного тока

Выразим проводимости через сопротивления:

$$G = y \cos \varphi = \frac{1}{z} \cdot \frac{R}{z} = \frac{R}{z^2} = \frac{R}{R^2 + X^2}. \quad (5.30)$$

Только в активной цепи, где $X = 0$, $G = \frac{1}{R}$, а в общем случае $G < \frac{1}{R}$.

$$B = y \sin \varphi = \frac{1}{z} \cdot \frac{X}{z} = \frac{X}{z^2} = \frac{X}{R^2 + X^2}. \quad (5.31)$$

Только в чисто реактивной цепи, где $R = 0$, $B = \frac{1}{X}$; в общем случае $|B| < \frac{1}{|X|}$.

Обратные соотношения: $R = z \cos \varphi = \frac{1}{y} \cdot \frac{G}{y} = \frac{G}{y^2} = \frac{G}{G^2 + B^2},$

$$X = z \sin \varphi = \frac{1}{y} \cdot \frac{B}{y} = \frac{B}{y^2} = \frac{B}{G^2 + B^2}. \quad (5.32)$$

Полное сопротивление и полная проводимость всегда взаимно обратны: $y = \frac{1}{z}$ и $z = \frac{1}{y}$.

5.15. Анализ простейших цепей переменного тока.

Для всех случаев примем начальную фазу тока $\Psi_i = 0$ и запишем мгновенное значение тока: $i = I_m \sin \omega t$.

1. Чисто активная цепь (рис. 5.13).

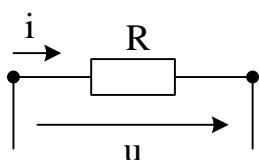


Рисунок 5.13

$$U_m = I_m R. \Psi_u = \Psi_i = 0, \text{ т.к. } X=0 \text{ и } \varphi=0, \text{ а } z=R.$$

В чисто активной цепи ток и напряжение совпадают по фазе: $u(t) = RI_m \sin \omega t$.

Графики $u(t)$, $i(t)$ и векторная диаграмма цепи приведены на рисунке 5.14.

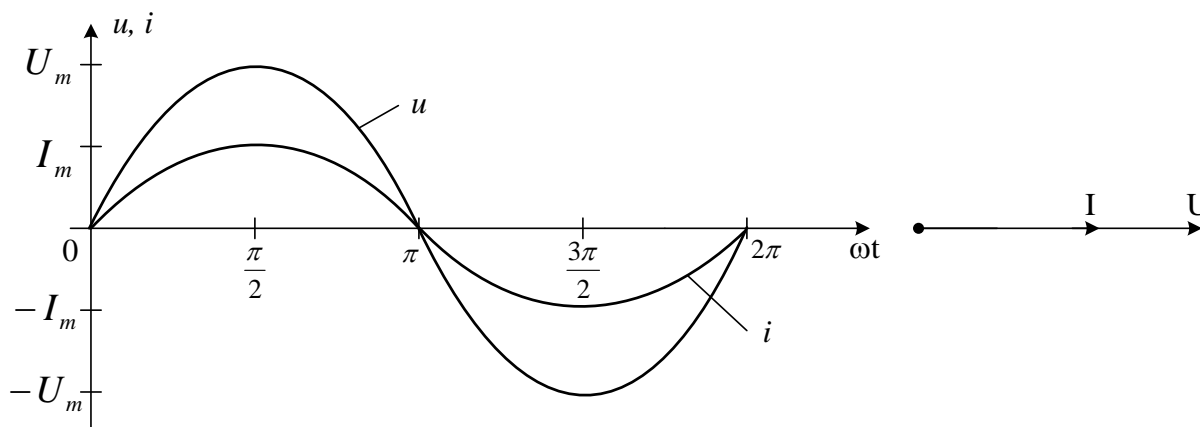
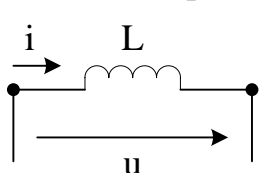


Рисунок 5.14

2. Чисто индуктивная цепь (рис. 5.15).

В этой цепи реактивное и полное сопротивления одинаковы: $X = X_L = \omega L$;



$$R=0; z=\omega L; \varphi = \arctg \frac{\omega L}{0} = \arctg \infty = \frac{\pi}{2}; U_m = \omega L I_m;$$

$$\Psi_u = \Psi_i + \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Рисунок 5.15

В чисто индуктивной цепи напряжение опережает ток по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$. Графики $i(t)$, $u(t) = \omega L I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ и векторная диаграмма изображены на рисунке 5.16.

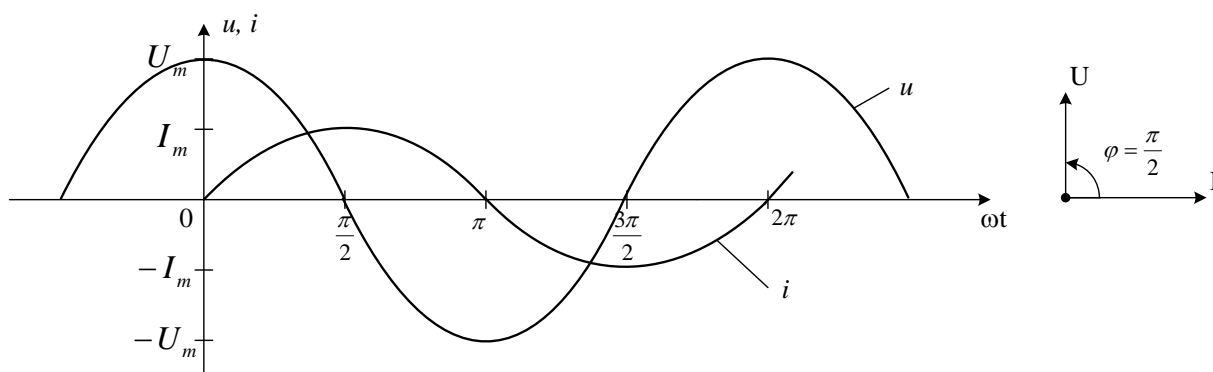
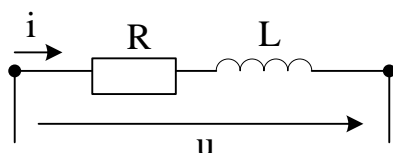


Рисунок 5.16

3. Активно-индуктивная цепь (рис. 5.17).



В этой цепи реактивное сопротивление

$X = X_L = \omega L$; полное сопротивление $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$. $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} > 0$ — острый угол. $U_m = I_m z$; $\psi_u = \varphi$.

Рисунок 5.17

Напряжение опережает ток по фазе на угол $\varphi < \frac{\pi}{2}$; $u(t) = z I_m \sin(\omega t + \varphi)$. Графики и векторная диаграмма цепи изображены на рисунке 5.18.

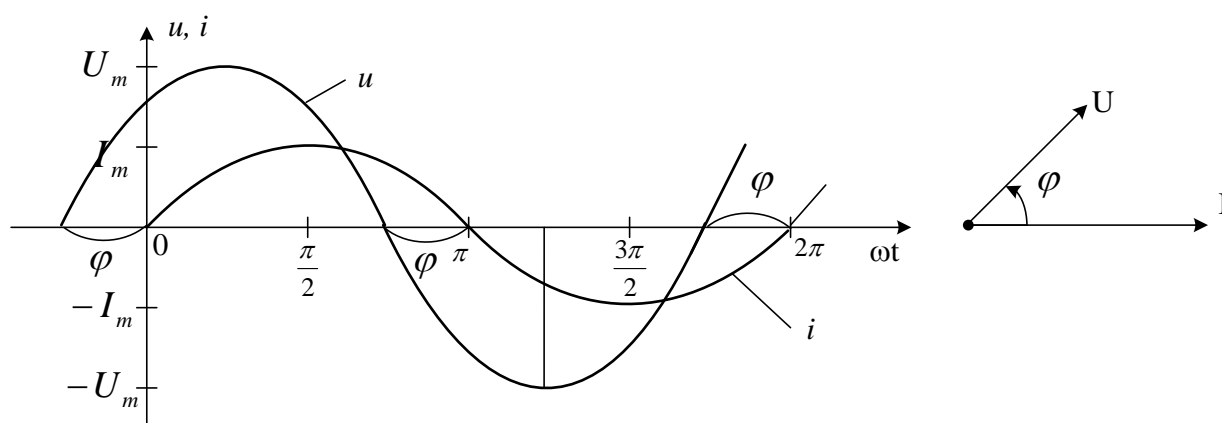
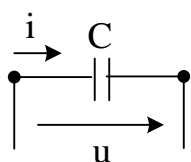


Рисунок 5.18



4. Чисто емкостная цепь (рис. 5.19).

В такой цепи реактивное сопротивление

$$X = -X_C = -\frac{1}{\omega C}; \quad \text{полное сопротивление}$$

$$z = |X| = \frac{1}{\omega C}. \quad \text{Угол сдвига фаз}$$

Рисунок 5.19

$$\varphi = \arctg \frac{-\frac{1}{\omega C}}{0} = \arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}; \quad \Psi_u = \Psi_i + \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

В чисто емкостной цепи напряжение отстает от тока по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$:

$$u(t) = \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Графики $u(t)$, $i(t)$ и векторная диаграмма цепи представлены на рисунке 5.20.

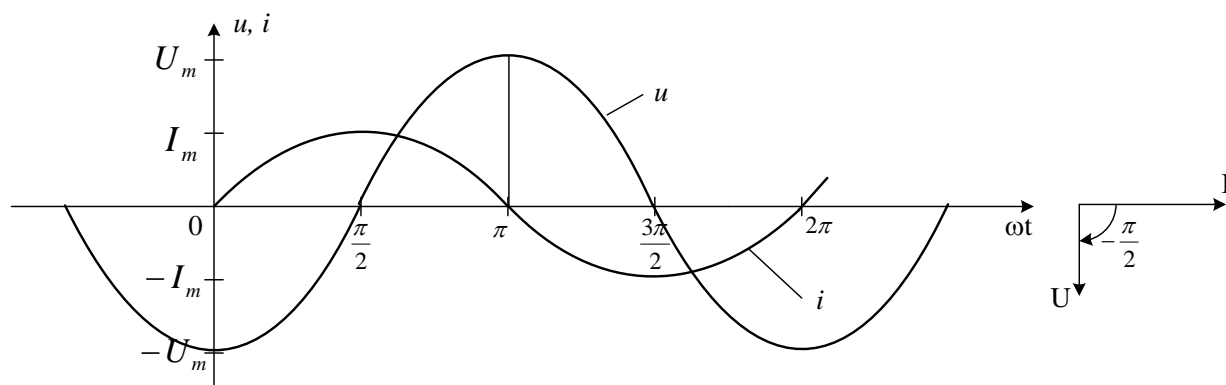
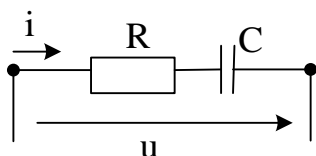


Рисунок 5.20

5. Активно-емкостная цепь (рис. 5.21).



В этой цепи также $X = -X_C = -\frac{1}{\omega C}$; полное со-

противление $z = \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$; угол сдвига

фаз $\varphi = \arctg \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} < 0$. Начальная фаза

Рисунок 5.21

напряжения $\Psi_u = \varphi = -|\varphi| < 0$.

Напряжение в такой цепи отстает от тока по фазе на острый угол φ .
Графики $i(t)$, $u(t)$ и векторная диаграмма цепи изображены на рисунке 5.22.

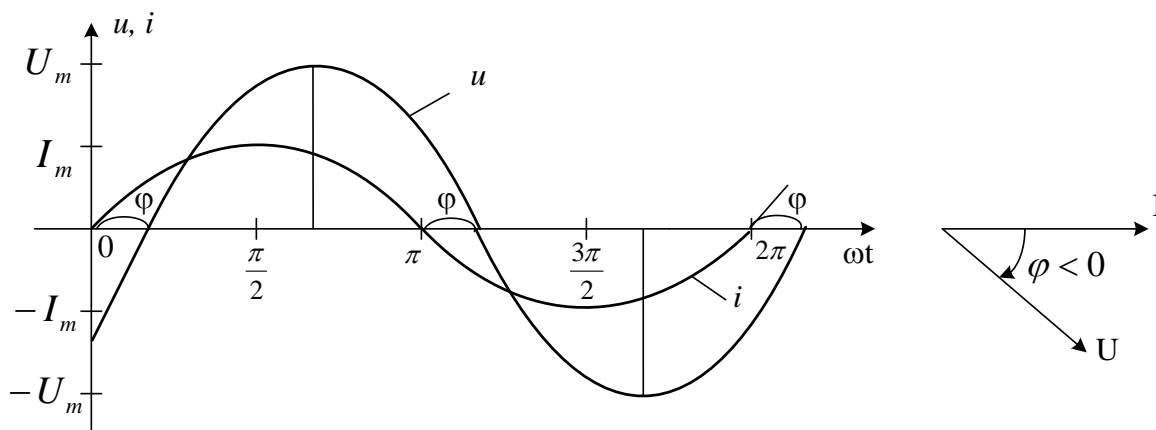
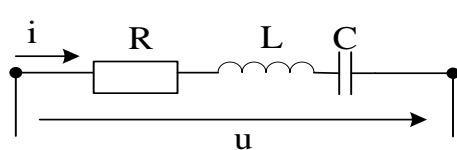


Рисунок 5.22

Таким образом, на векторных диаграммах принято откладывать углы φ от тока, причем положительные углы откладывают против часовой стрелки, а отрицательные – по часовой стрелке.

6. Цепь, содержащая элементы R, L, C (рис. 5.23)

Здесь возможны три варианта соотношений параметров:



- а) $\omega L > \frac{1}{\omega C}$; $X > 0$; $\varphi > 0$ цепь носит индуктивный характер. Графики и векторная диаграмма представлены на рисунке 5.18
- б) $\omega L < \frac{1}{\omega C}$; $X < 0$; $\varphi < 0$; цепь носит

Рисунок 5.23

емкостный характер. Графики и векторная диаграмма совпадают с изображенными на рисунке 5.22.

- в) $\omega L = \frac{1}{\omega C}$; $X = 0$; $\varphi = 0$; цепь носит активный характер. Графики и векторная диаграмма соответствуют рисунку 5.14.

Такой режим цепи называется режимом резонанса и будет подробно рассмотрен далее.

5.16 Метод комплексных амплитуд

Метод расчёта, использующий полные сопротивления и проводимости и их составляющие, имеет ограниченное применение для последовательного и параллельного соединения простейших цепей переменного тока. Для смешанного соединения, а тем более для сложных цепей, необходим универсальный метод, позволяющий применять и для цепей переменного тока все те методы, которые были рассмотрены в теории цепей постоянного тока. Та-

ким методом является метод комплексных амплитуд, который раньше называли символическим методом расчёта цепей переменного тока.

Математические основы метода комплексных амплитуд

Напомним математические основы метода. В курсе ТОЭ мнимую единицу обозначают так: $j = \sqrt{-1}$; $j^2 = -1$; $-j^2 = 1$; $\frac{1}{j} = -j$.

Все комплексные числа могут быть представлены в двух формах записи - алгебраической и показательной, которые имеют тесную взаимосвязь:

$$\underline{A} = a + jb = A \cdot e^{j\alpha},$$

где \underline{A} - комплексное число; a - вещественная часть комплексного числа; b - мнимая часть комплексного числа; A - модуль комплексного числа; α - аргумент комплексного числа.

Взаимные переходы от алгебраической формы записи к показательной форме наглядно иллюстрируются геометрической интерпретацией, где на комплексной плоскости каждое комплексное число изображается вектором (рис. 5.24).

$A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$. Наоборот $a = A \cos \alpha$; $b = A \sin \alpha$. Для перехода от показательной формы к алгебраической используется формула Эйлера:

$$e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha.$$

Полезно запомнить, что: $j = e^{j90^\circ}$; $-j = e^{-j90^\circ}$; $-1 = e^{\pm j180^\circ}$.

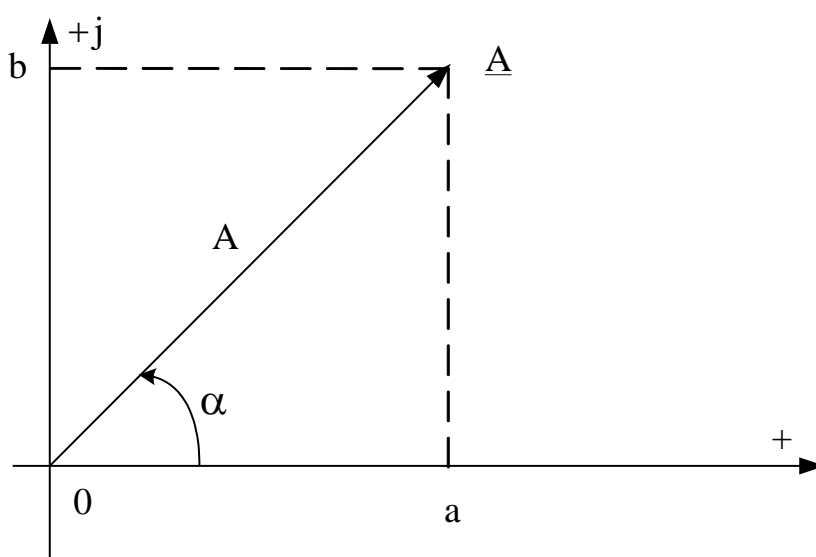


Рисунок 5.24

Действия над комплексными числами

Операции сложения и вычитания производятся в алгебраической форме записи:

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \pm \underline{A}_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) = a + jb.$$

Операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня выполняются в показательной форме записи:

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \cdot \underline{A}_2 = A_1 e^{j\alpha_1} \cdot A_2 e^{j\alpha_2} = A_1 A_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} = A e^{j\alpha};$$

$$\underline{A} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{A}_2} = \frac{A_1 e^{j\alpha_1}}{A_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} = A e^{j\alpha};$$

$$\underline{A} = (\underline{A}_1)^n = (A_1 e^{j\alpha_1})^n = A_1^n e^{jn\alpha_1} = A e^{j\alpha};$$

$$\underline{A} = \sqrt{\underline{A}_1} = \sqrt{A_1 e^{j\alpha_1}} = \sqrt{A_1} e^{\frac{j\alpha_1}{2}} = A e^{j\alpha}.$$

Сопряженные комплексные числа (рис. 5.25) отличаются друг от друга знаком при j в любой форме записи:

$$\underline{A} = a + jb = A e^{j\alpha}; \quad \underline{A}^* = a - jb = A e^{-j\alpha}. \text{ Полезно знать такие соотношения:}$$

$$\underline{A} + \underline{A}^* = 2a; \quad \underline{A} - \underline{A}^* = j2b; \quad \underline{A} \cdot \underline{A}^* = A^2 = a^2 + b^2 - \text{всегда вещественное, положительное число.}$$

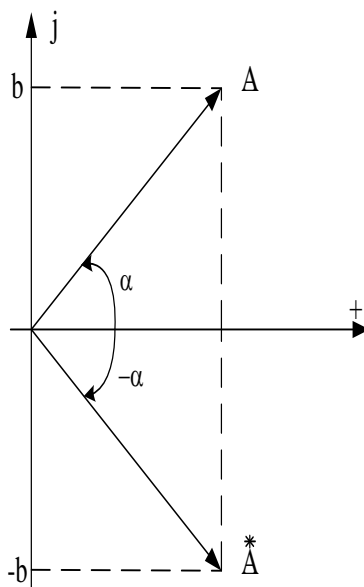


Рисунок 5.25

5.17. Изображение синусоидальных функций времени комплексными числами

Рассмотрим комплексное выражение:

$$I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Очевидно, мнимая часть этого выражения представляет собой мгновенное значение тока:

$$i = \left[I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} \right]_{im}. \quad (5.33)$$

Полученному соотношению можно придать геометрическую интерпретацию (рис. 5.26).

Проекция вектора, вращающегося на комплексной плоскости, на мнимую ось в любой момент времени равна мгновенному значению тока.

Рассмотрим выражение (2.80) более подробно.

$$i = \left[I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} \right]_{im} = \left[I_m e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t} \right]_{im} = \left[\underline{I}_m e^{j\omega t} \right]_{im}.$$

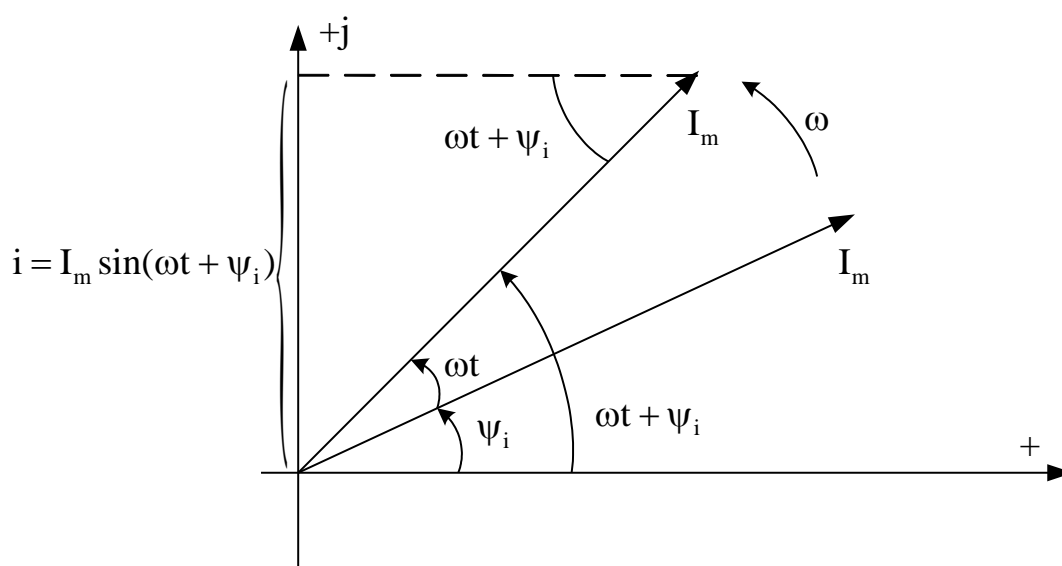


Рисунок 5.26

Здесь $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ (5.34) - комплексная амплитуда тока, не являющаяся функцией времени.

Величина $e^{j\omega t}$ зависит от времени и сообщает вектору \underline{I}_m вращение на комплексной плоскости с угловой скоростью ω .

По аналогии с комплексной амплитудой тока $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$, можно записать комплексные амплитуды напряжения, ЭДС и любой другой синусоидальной функции: $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$; $\underline{E}_m = E_m e^{j\psi_e}$.

Разделив комплексные амплитуды на $\sqrt{2}$, получим комплексы действующих значений соответствующих величин:

$$\underline{I} = \frac{\underline{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} = I e^{j\psi_i}; \quad \underline{U} = U e^{j\psi_u}, \quad \underline{E} = E e^{j\psi_e}. \quad (5.35)$$

5.18. Теоремы дифференцирования и интегрирования

Найдем изображение производной и интеграла от синусоидальной функции в виде комплекса. Производная от тока:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} [\underline{I}_m e^{j\omega t}]_{im} = [\underline{I}_m j\omega e^{j\omega t}]_{im}. \quad (5.36)$$

Таким образом, дифференцированию синусоидальной функции времени соответствует умножение её комплексной амплитуды на $j\omega$: $\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$.

Возьмём интеграл от синусоидальной функции:

$$\int i dt = \int [\underline{I}_m e^{j\omega t}]_{im} dt = \left[\frac{1}{j\omega} \underline{I}_m e^{j\omega t} \right]_{im}. \quad (5.37)$$

Интегрирование синусоидальной функции времени эквивалентно делению её комплексной амплитуды на $j\omega$: $\int \rightarrow \frac{1}{j\omega}$.

Поскольку введение комплексных амплитуд даёт возможность заменить операции дифференцирования и интегрирования операциями умножения и деления на $j\omega$, то, очевидно, появится возможность перейти от дифференциально-интегральных уравнений к алгебраическим уравнениям.

5.19. Закон Ома в комплексной форме

Рассмотрим элементарную цепь (рис. 5.27).

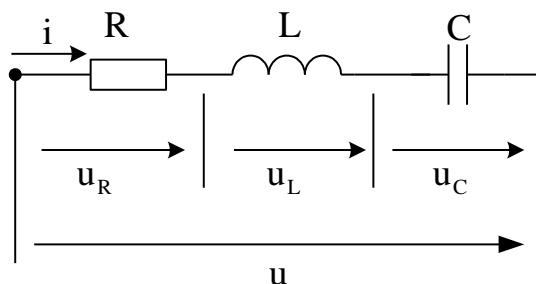


Рисунок 5.27

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (5.38)$$

Выразим каждую из величин входящих в (5.38), в виде комплекса и подставим их в уравнение (5.38):

$u = [\underline{U}_m \cdot e^{j\omega t}]_{im}$; $u_R = Ri = [RI_m e^{j\omega t}]_{im}$; $u_L = L \frac{di}{dt} = [j\omega LI_m e^{j\omega t}]_{im}$, - согласно теореме дифференцирования.

Согласно теореме интегрирования: $u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \left[\frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m e^{j\omega t} \right]_{im}$;

$$[\underline{U}_m e^{j\omega t}]_{im} = \left[\left(RI_m + j\omega LI_m + \frac{1}{j\omega C} I_m \right) e^{j\omega t} \right]_{im}. \quad (5.39)$$

Если в любой момент времени равны мнимые части каких-либо комплексных функций, то равны и сами функции. Знак мнимой части im можно опустить.

Величина $e^{j\omega t} \neq 0$ ни при каком значении t . На нее можно сократить. В результате получим:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{I}_m \underline{Z}, \quad (5.40)$$

где $\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX$ (5.41) - комплекс полного

сопротивления цепи. Таким образом, $\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}}$ (5.42).

Это и есть закон Ома для комплексных амплитуд. Разделив обе части на $\sqrt{2}$, получим закон Ома для действующих значений:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}. \quad (5.43)$$

5.20. Комплексы полного сопротивления и полной проводимости

Оба комплекса употребляются как в алгебраической, так и в показательной формах:

Комплекс полного сопротивления:

$$\underline{Z} = R + jX = ze^{j\varphi},$$

где $z = \sqrt{R^2 + X^2}$ - модуль комплекса полного сопротивления; или просто модуль сопротивления; $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ - угол сдвига фаз между током и напряжением на данном участке.

Наоборот:

$$\underline{Z} = ze^{j\varphi} = z(\cos \varphi + j \sin \varphi) = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = R + jX.$$

Комплекс полной проводимости:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G - jB, \quad (5.44)$$

иначе:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{ze^{j\varphi}} = ye^{-j\varphi} = y(\cos \varphi - j \sin \varphi) = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = G - jB.$$

$$\text{Обратный переход: } \underline{Y} = G - jB = \sqrt{G^2 + B^2} \cdot e^{-j \arctg \frac{B}{G}} = ye^{-j\varphi}.$$

5.21. Законы Кирхгофа в комплексной форме. Первый закон Кирхгофа (рис. 5.28)

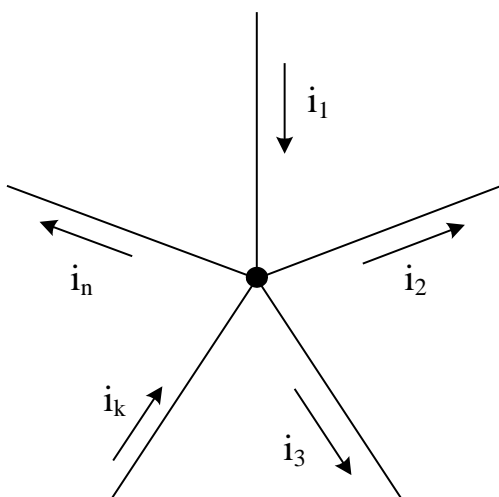


Рисунок 5.28

Для мгновенных значений квазистационарных токов справедливы законы Кирхгофа для цепей постоянного тока:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

Подставляем все токи в виде комплексов, опускаем знак мнимой части и сокращаем на $e^{j\omega t}$:

$$\sum \left[\underline{I}_{mk} e^{j\omega t} \right]_{im} = 0; \quad \sum \underline{I}_{mk} = 0.$$

Разделив обе части на $\sqrt{2}$, получим первый закон Кирхгофа для комплексов действующих значений:

$$\sum \underline{I}_k = 0. \quad (5.45)$$

В узле электрической цепи алгебраическая сумма комплексов токов равна нулю.

Правила знаков для токов такие же, как и в цепях постоянного тока.

Второй закон Кирхгофа

Рассмотрим контур, выделенный из сложной цепи переменного тока (рис. 5.29).

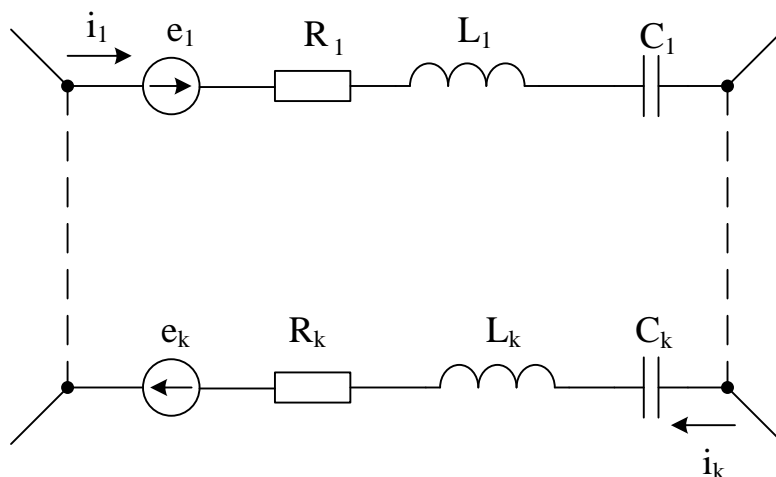


Рисунок 5.29

Запишем второй закон Кирхгофа для мгновенных значений:

$$\sum e_k = \sum \left(R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right).$$

Все мгновенные значения изобразим в виде комплексов, опустим знак мнимой части, сократим на $e^{j\omega t}$ и разделим на $\sqrt{2}$ (по аналогии с законом Ома):

$$\sum \left[\underline{E}_{km} e^{j\omega t} \right]_{im} = \sum \left[\underline{I}_{km} \left(R_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k} \right) e^{j\omega t} \right]_{im}.$$

$$\sum \underline{E}_k = \sum \underline{I}_k \underline{Z}_k. \quad (5.46)$$

В контуре цепи синусоидального тока алгебраическая сумма комплексов ЭДС равна алгебраической сумме комплексов падений напряжений.

Правила знаков те же, что и в цепях постоянного тока.

Таким образом, в комплексной форме справедливы закон Ома и законы Кирхгофа, на которых базируются все методы расчета цепей.

Следовательно, для цепей переменного тока в комплексной форме применимы все те методы расчета простых и сложных цепей, которые известны из теории цепей постоянного тока.

Расчет цепей переменного тока сопровождается построением векторных диаграмм.

Рассмотрим расчет некоторых типов цепей переменного тока.

5.22. Расчет последовательного соединения (рис. 5.30)

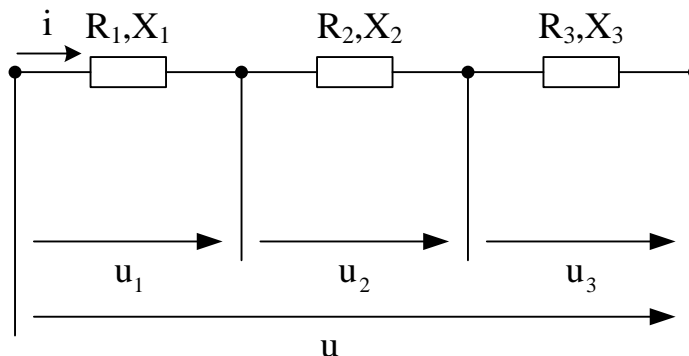


Рисунок 5.30

Заданы u , R_k , X_k .

Составляем комплексы: $\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$; $\underline{Z}_k = R_k + jX_k$.

В комплексной форме по второму закону Кирхгофа:

$$\underline{U} = \sum \underline{U}_k = \underline{I} \sum \underline{Z}_k = \underline{I} \underline{Z}_{\Sigma}.$$

$$\underline{Z}_{\Sigma} = \sum \underline{Z}_k = \sum (R_k + jX_k) = \sum R_k + j \sum X_k = R_{\Sigma} + jX_{\Sigma}.$$

Итак, при последовательном соединении суммируются: активные сопротивления R_k , реактивные сопротивления X_k (с учетом знака), комплексы полных сопротивлений \underline{Z}_k .

После определения \underline{Z}_{Σ} можно определить ток и напряжения на участках:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\Sigma}}; \quad \underline{U}_k = \underline{I} \underline{Z}_k = U_k e^{j\psi_{uk}}; \quad u_k(t) = U_k \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_{uk}).$$

На векторной диаграмме геометрически суммируются векторы напряжений.

Пусть $X_1 > 0$, $X_2 < 0$, $X_3 > 0$; тогда те же знаки имеют углы сдвига фаз: $\varphi_1 > 0$; $\varphi_2 < 0$; $\varphi_3 > 0$.

Векторная диаграмма имеет следующий вид (рис. 5.31).

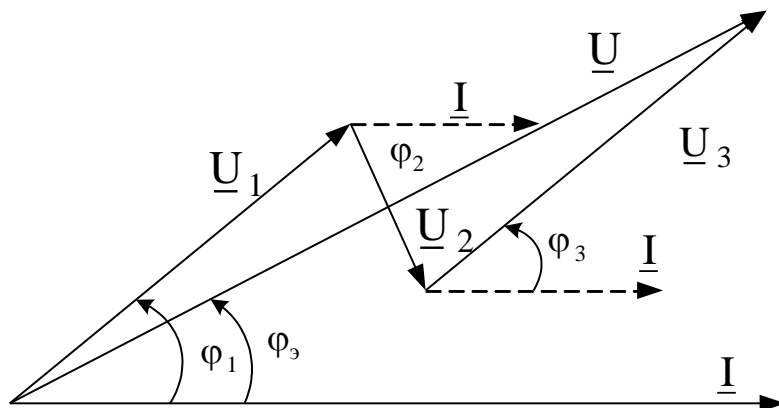


Рисунок 5.31

Угол сдвига фаз между током и напряжением во всей цепи на этой диаграмме

$$\varphi_3 = \arctg \frac{X_3}{R_3} > 0,$$

т.к. он отложен от тока против часовой стрелки. Вся цепь в целом носит индуктивный характер.

5.23. Расчет параллельного соединения (рис. 5.32)

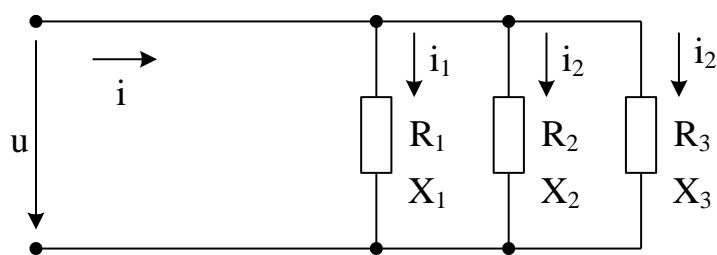


Рисунок 5.32

Даны u , R_k , X_k . Составляем комплексы напряжения $\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$ и проводимостей ветвей:

$$G_k = \frac{R_k}{R_k^2 + X_k^2}; B_k = \frac{X_k}{R_k^2 + X_k^2}; Y_k = G_k - jB_k.$$

Определяем токи в ветвях и суммируем их по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_k} = \underline{U}\underline{Y}_k; \quad \underline{I} = \sum \underline{I}_k = \underline{U}\sum \underline{Y}_k = \underline{U}(\sum G_k - j\sum B_k) = \underline{U}\underline{Y}_\Sigma.$$

Здесь эквивалентная активная проводимость цепи $G_\Sigma = \sum G_k$; эквивалентная реактивная проводимость цепи $B_\Sigma = \sum B_k$ (с учетом знаков); комплекс эквивалентной полной проводимости цепи:

$$\underline{Y}_\Sigma = G_\Sigma - jB_\Sigma = \sqrt{G_\Sigma^2 + B_\Sigma^2} e^{-j\arctg \frac{B_\Sigma}{G_\Sigma}} = y_\Sigma e^{-j\varphi_\Sigma}.$$

По закону Ома общий ток $\underline{I} = \underline{U}\underline{Y}_\Sigma$.

Таким образом, при параллельном соединении суммируются: активные проводимости G_k , реактивные проводимости B_k (алгебраически), комплексы полных проводимостей \underline{Y}_k .

На векторной диаграмме (рис. 5.33) геометрически суммируются векторы токов. Зададимся для определенности характером ветвей параллельного соединения. Пусть $X_1 > 0$, $\varphi_1 > 0$ – первая ветвь имеет индуктивный характер; $X_2 = 0$, $\varphi_2 = 0$ – вторая ветвь чисто активная; $X_3 < 0$, $\varphi_3 < 0$ – третья ветвь носит емкостной характер.

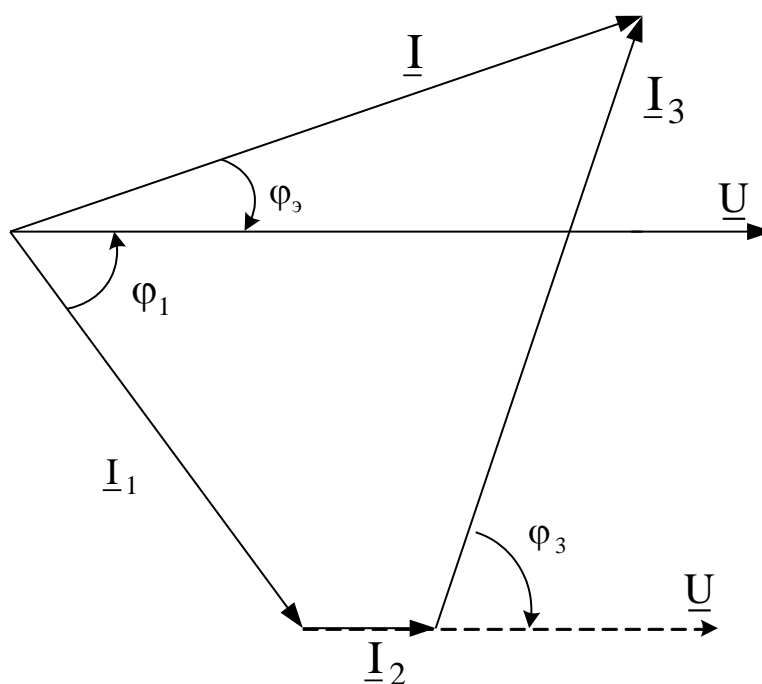


Рисунок 5.33

Следует помнить, что на векторных диаграммах углы φ откладываются от токов к напряжениям: положительные углы – против часовой стрелки, отрицательные – по часовой стрелке. Судя по векторной диаграмме, вся цепь в целом носит емкостный характер, поскольку $\varphi_0 < 0$.

5.24. Расчет смешанного соединения (рис. 5.34)

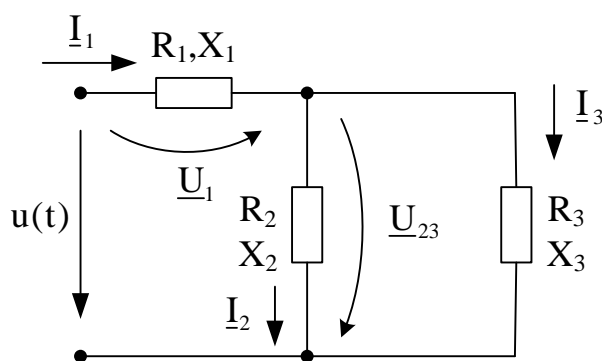


Рисунок 5.34

Дано: $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, R_k , X_k .

Найти токи и напряжения.

Расчет смешанного соединения в цепи переменного тока проводится так же, как и расчет цепи постоянного тока аналогичной конфигурации. Изменяется только форма записи – она становится комплексной. Составляем комплексы сопротивлений ветвей:

$$\underline{Z}_k = R_k + jX_k = z_k e^{j\varphi_k},$$

где $z_k = \sqrt{R_k^2 + X_k^2}$; $\varphi_k = \arctg \frac{X_k}{R_k}$.

Записываем комплекс входного напряжения: $\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u}$.

Находим общее сопротивление цепи: $\underline{Z}_{\text{вс}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$.

Определим общий ток: $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{вс}}}$.

Токи в параллельных ветвях можно найти по формуле разброса и первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2.$$

Напряжение на участках:

$$\underline{U}_{23} = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{I}_3 \underline{Z}_3; \underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = \underline{U} - \underline{U}_{23}.$$

Для построения векторной диаграммы нужно использовать действующие значения токов и напряжений (модули комплексов) и углы сдвига фаз между ними φ (аргументы комплексов сопротивлений). Итак, пусть величины $\underline{U}_1, \underline{I}_1, \varphi_1, \underline{U}_{23} \begin{cases} \underline{I}_2, \varphi_2 \\ \underline{I}_3, \varphi_3 \end{cases}$ уже найдены. Для определенности положим $\varphi_1 > 0$,

$\varphi_2 < 0, \varphi_3 > 0$.

Порядок построения векторной диаграммы (рис. 5.35):

$$\underline{U}_{23} \rightarrow \underline{I}_3(\varphi_3) \rightarrow \underline{I}_2(\varphi_2) \rightarrow \underline{I}_1 \rightarrow \underline{U}_1(\varphi_1) \rightarrow \underline{U}.$$

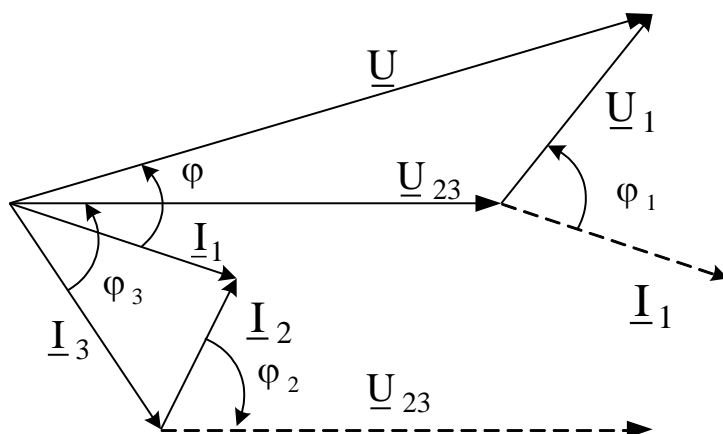


Рисунок 5.35

На векторной диаграмме вся цепь в целом носит индуктивный характер, т.к. общий ток \underline{I}_1 отстает от общего напряжения \underline{U} на угол φ .

5.25. Мгновенная и средняя мощность цепи переменного тока

Мгновенная мощность — это величина, равная скорости поступления энергии в цепь в данный момент времени:

$$p = ui. \quad (5.47)$$

Пусть напряжение и ток синусоидальны. Примем начальную фазу тока равной нулю: $\psi_i = 0$. Тогда начальная фаза напряжения $\psi_u = \varphi$.

$$i = I_m \sin \omega t;$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi);$$

Из тригонометрии: $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$.

$$\begin{aligned} p &= U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Поскольку $\cos \varphi < 1$, а $\cos(2\omega t + \varphi)$ меняется в пределах от -1 до $+1$, то в некоторые моменты времени мгновенная мощность $p < 0$.

Если ток или напряжение в какой-либо момент равны нулю, мгновенная мощность тоже равна нулю. Если ток и напряжение имеют одинаковые знаки, то мгновенная мощность положительна, а при различных знаках u и i $p < 0$.

Изобразим графики $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$. Для определенности положим $\varphi > 0$ (рис. 5.36).

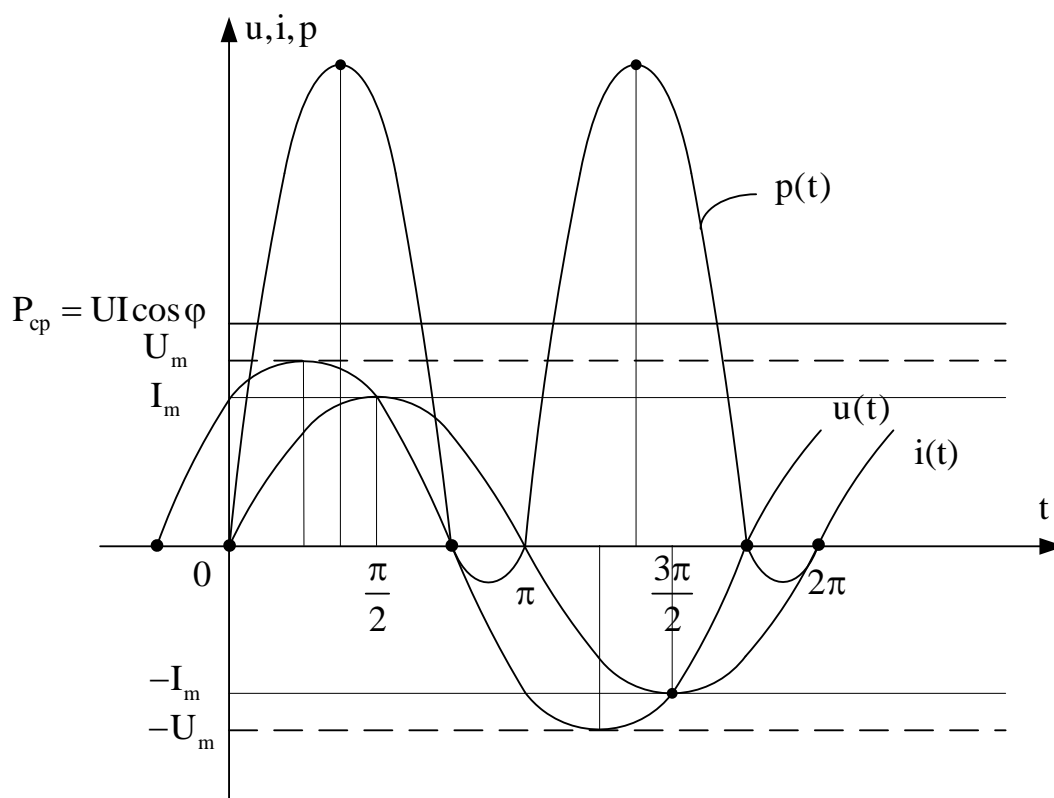


Рисунок 5.36

В те моменты времени, когда $p > 0$, энергия от источника поступает в цепь. Когда $p < 0$, энергия из цепи возвращается источнику. Площадь, ограниченная положительной частью кривой $p(t)$, больше, чем площадь, ограниченная отрицательной ее частью, следовательно, в среднем за период преобладает потребление энергии цепью.

Найдем среднее значение мгновенной мощности за период:

$$\begin{aligned} P_{cp} &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} UI \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] dt = \\ &= \frac{1}{T} UI \cos \varphi \cdot t \Big|_0^T - UI \cos \varphi \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt = UI \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Средняя мощность за период называется активной мощностью и обозначается P . Это та мощность, которая в данной цепи преобразуется в тепло (или механическую работу):

$$P = UI \cos \varphi, \quad (5.49a)$$

$P \geq 0$, т.к. $\cos \varphi \geq 0$.

5.26. Активные и реактивные процессы в цепи переменного тока

Разложим мгновенную мощность на две составляющие – мгновенную активную и мгновенную реактивную мощности. Для этого разложим мгновенное значение напряжения на такие же составляющие, используя треугольник напряжений (рис. 5.37). Полагаем $\varphi > 0$.

$$u = u_a + u_p; \quad p = ui = (u_a + u_p)i = u_a i + u_p i = p_a + p_p.$$

По прежнему, считаем $\psi_i = 0$. u_a по фазе с током совпадает, а u_p опережает ток по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} u_a &= U_m \cos \varphi \sin \omega t; \quad u_p = U_m \sin \varphi \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_m \sin \varphi \cos \omega t; \\ p_a &= u_a i = U_m \cos \varphi \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) = UI \cos \varphi - UI \cos \varphi \cos 2\omega t. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Поскольку $|\cos 2\omega t| \leq 1$, то $1 - \cos 2\omega t \geq 0$, т.е. мгновенная активная мощность не отрицательна.

$$p_{\delta} = U_m \sin \varphi \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi \sin 2\omega t = UI \sin \varphi \sin 2\omega t . \quad (5.51)$$

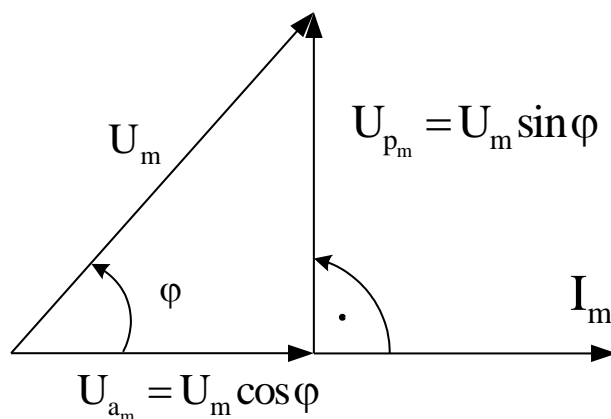


Рисунок 5.37

Мгновенная реактивная мощность (5.51) изменяется по закону $\sin 2\omega t$, т.е. дважды за период меняет знак. Строим графики мгновенных мощностей (рис. 5.38).

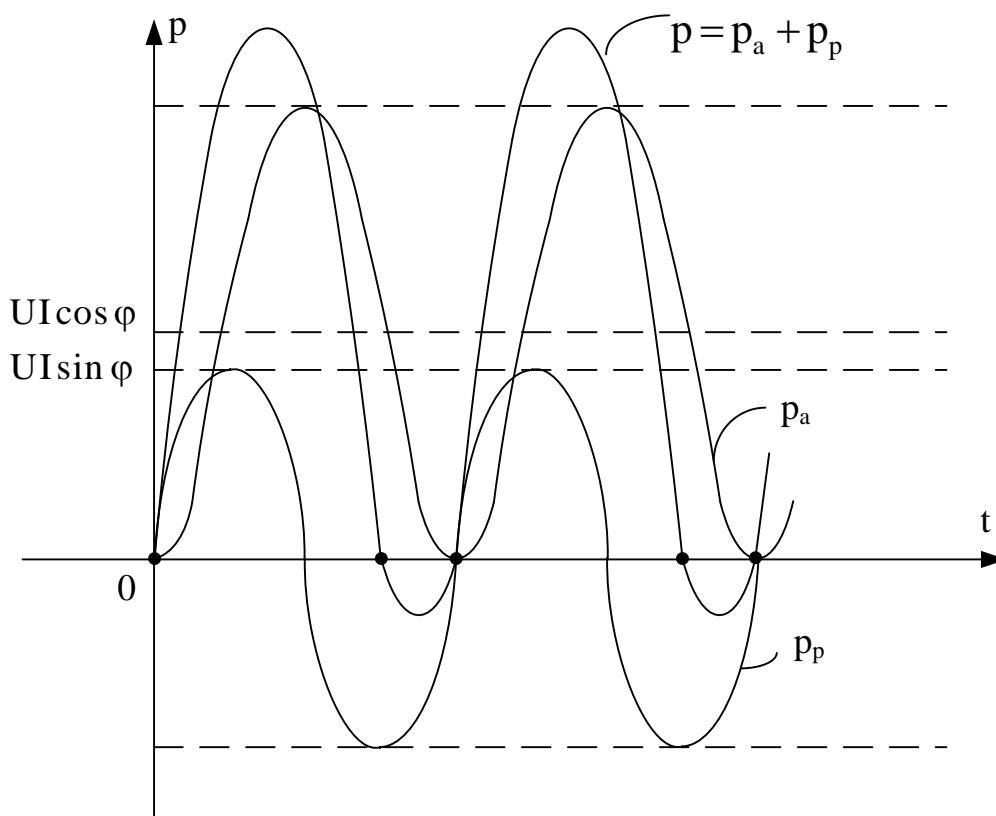


Рисунок 5.38

Мгновенная активная мощность не бывает отрицательной, т.к. процесс преобразования электрической энергии в тепло необратим. Мгновенная реактивная мощность меняет знак дважды за период, т.к. энергия магнитного (или электрического) поля тоже дважды за период нарастает и убывает. В моменты времени, когда энергия поля увеличивается, энергия от источника поступает в цепь и накапливается в поле, а $p_p > 0$. Когда поле исчезает, его энергия возвращается в источник, а $p_p < 0$.

Таким образом, реактивная мощность совершает колебания между источником и цепью.

Среднее за период значение мгновенной активной мощности совпадает со средним значением всей мгновенной мощности и называется активной мощностью:

$$P = UI \cos \varphi = U_a I = UI_a = RI^2 = GU^2. \quad (5.52)$$

Амплитуда мгновенной реактивной мощности называется реактивной мощностью:

$$Q = UI \sin \varphi = U_p I = UI_p = XI^2 = BU^2. \quad (5.53)$$

Эта мощность в цепи идет на создание электромагнитных полей. Полной (кажущейся) мощностью называется величина:

$$S = UI = ZI^2 = yU^2. \quad (5.54)$$

5.27. Треугольник мощностей

Он получается из треугольника напряжений умножением всех его сторон на величину тока (рис. 5.39):

Из треугольника мощностей вытекают следующие соотношения:

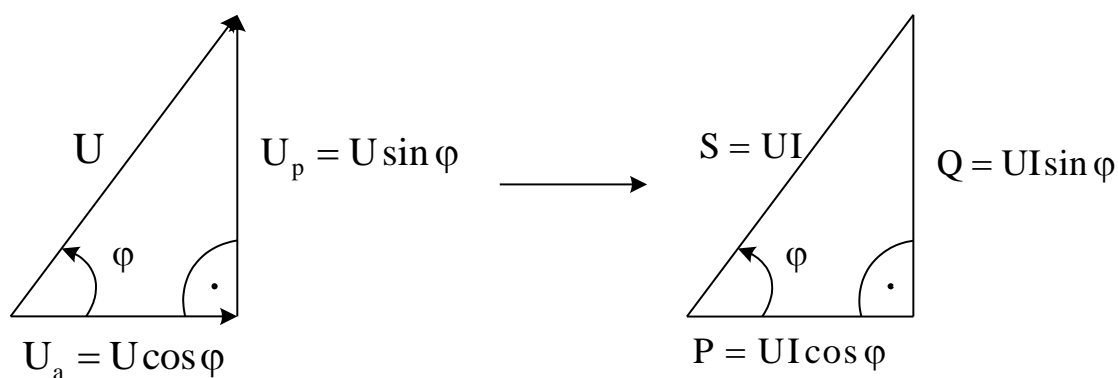


Рисунок 5.39

$$P = S \cos \varphi ; Q = S \sin \varphi ; S = \sqrt{P^2 + Q^2} ; \varphi = \arctg \frac{Q}{P}. \quad (5.55)$$

5.28. Комплексная форма записи мощности

Известно, что $\varphi = \psi_u - \psi_i$, поэтому возьмем произведение \underline{U} на \underline{I}^* :

$$\underline{U} = Ue^{j\psi_u}; \quad \underline{I} = Ie^{j\psi_i}; \quad \underline{I}^* = Ie^{-j\psi_i}.$$

$\underline{U}\underline{I}^* = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} = \underline{S}$ - комплекс полной мощности (встречается обозначение \tilde{S}).

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ. \quad (5.56)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P &= [\underline{S}]_{\text{Re}} = \left[\underline{U}\underline{I}^* \right]_{\text{Re}} ; \\ Q &= [\underline{S}]_{\text{Im}} = \left[\underline{U}\underline{I}^* \right]_{\text{Im}} . \end{aligned} \quad (5.56a)$$

5.29. Измерение активной мощности

Измерение производится с помощью ваттметра. Этот электроизмерительный прибор имеет две обмотки (рис. 5.40):

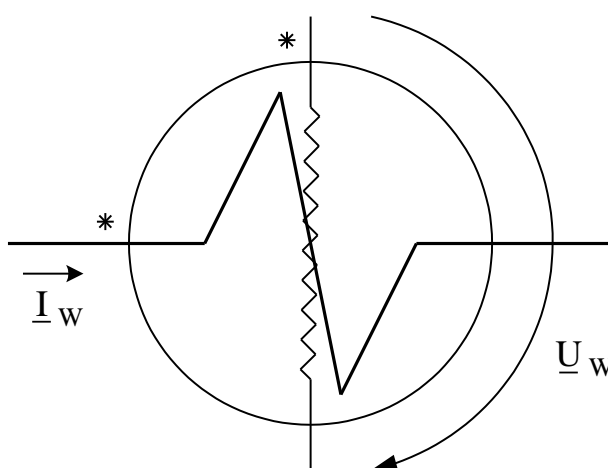


Рисунок 5.40

1) токовая обмотка - с малым числом витков провода большого сечения, с малым сопротивлением; она включается последовательно с исследуемой цепью (как амперметр);

2) обмотка напряжения – с большим числом витков тонкого провода, с большим сопротивлением; она включается параллельно исследуемой цепи (как вольтметр).

Показание ваттметра вычисляется по формуле:

$$P_w = [\underline{U}_w \underline{I}_w]_{re} = U_w I_w \cos(\overset{\wedge}{U_w I_w}), \quad (5.37)$$

если положительные направления \underline{I}_w и \underline{U}_w такие, как на рисунке.

5.30. Баланс мощностей в цепи переменного тока

В цепи переменного тока должен соблюдаться баланс полных мощностей:

$$\sum \underline{S}_{\text{выр}} = \sum \underline{S}_{\text{потр}}. \quad (5.58)$$

Это уравнение распадается на два уравнения баланса активных и реактивных мощностей:

$$\begin{aligned} \sum P_{\text{выр}} &= \sum P_{\text{потр}}; \\ \sum Q_{\text{выр}} &= \sum Q_{\text{потр}}. \end{aligned} \quad (5.58a)$$

5.31. Резонансные явления в цепи переменного тока

Резонансом называется явление в цепи переменного тока, содержащей реактивные элементы, при котором ток и напряжение совпадают по фазе.

1) Резонанс при последовательном соединении (рис. 5.41)

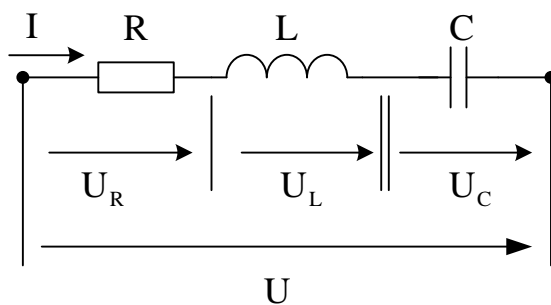


Рисунок 5.41

Условие резонанса: $\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = 0; X=0$.

При заданных параметрах R, L, C резонанса можно добиться изменением частоты напряжения источника. Обозначим резонансную частоту ω_0 и найдем ее из условия резонанса:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.59)$$

Найдем ток при резонансе. В общем случае $z = \sqrt{R^2 + X^2}$. При резонансе $X_0 = 0, z_0 = R$. Резонансный ток $I_0 = \frac{U}{R}$; это наибольшее возможное в данной цепи значение тока.

Напряжения на реактивных элементах при резонансе:

$$U_{L_0} = \omega_0 L I_0 = \frac{\omega_0 L}{R} U; \quad U_{C_0} = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = \frac{1}{\omega_0 C R} U.$$

При резонансе

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho - \text{характеристическое сопротивление цепи.}$$

$$\frac{U_{L_0}}{U} = \frac{U_{C_0}}{U} = \frac{\rho}{R} = Q - \text{добротность контура.} \quad (5.60)$$

Добротностью контура называется величина, которая показывает, во сколько раз напряжение на реактивных элементах при резонансе больше приложенного напряжения. Добротность может достигать сотен единиц, в особенности в радиотехнических цепях. Однако напряжения на реактивных элементах находятся в противофазе, и их сумма равна нулю.

Резонанс при последовательном соединении называют резонансом напряжений.

Векторная диаграмма при резонансе напряжений изображена на рис. 5.42.

$$U_{R_0} = U; \quad U_{L_0} = U_{C_0} = QU.$$

Величина, обратная добротности, называется затуханием цепи:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}. \quad (5.61)$$

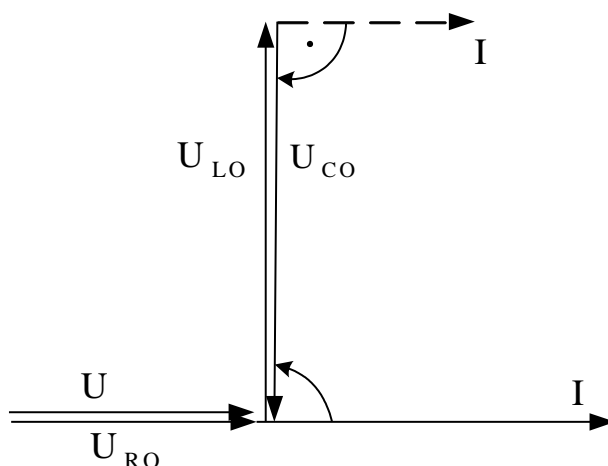


Рисунок. 5.42

Для выяснения физической сущности резонанса напряжений определим мгновенные значения энергий магнитного и электрического полей. Мгновенные значения тока и напряжения на конденсаторе:

$$i_0 = I_{0m} \sin \omega_0 t; \quad u_{C_0} = -\frac{1}{\omega_0 C} I_{0m} \cos \omega_0 t.$$

Мгновенные значения энергий:

$$W_{m0} = \frac{L i_0^2}{2} = \frac{L I_{0m}^2}{2} \sin^2 \omega_0 t;$$

$$W_{e0} = \frac{C u_{C0}^2}{2} = \frac{C I_{0m}^2}{2(\omega_0 C)^2} \cos^2 \omega_0 t = \frac{I_{0m}^2}{2\omega_0^2 C} \cos^2 \omega_0 t = \frac{L I_{0m}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t.$$

Здесь учтено, что $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, отсюда $L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$.

Суммарная энергия электромагнитного поля:

$$W_{em0} = W_{m0} + W_{e0} = \frac{L I_{0m}^2}{2} (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{L I_{0m}^2}{2} = \text{const.}$$

Таким образом, при резонансе амплитуды энергий одинаковы, а их сумма не зависит от времени (рис. 5.43). От источника энергия на создание полей не потребляется (при $\varphi=0$ нет реактивной мощности), она лишь переходит из магнитного поля в электрическое и наоборот.

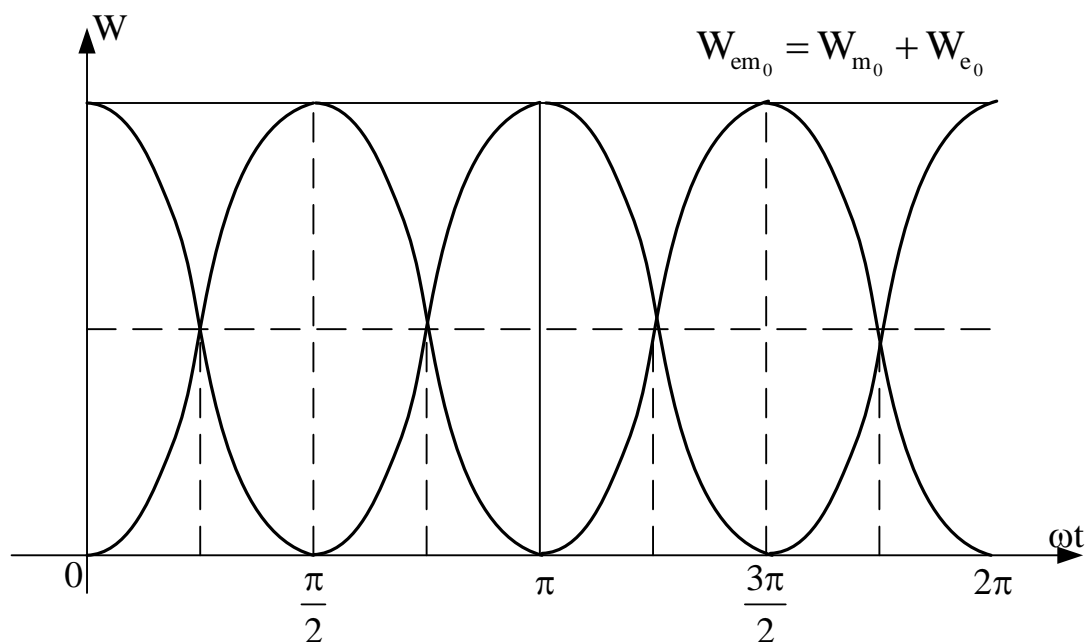


Рисунок 5.43

Итак, при резонансе происходят колебания энергии электромагнитного поля.

Цепь R , L , C при резонансе называют последовательным колебательным контуром.

2) Резонанс при параллельном соединении (рис. 5.44).

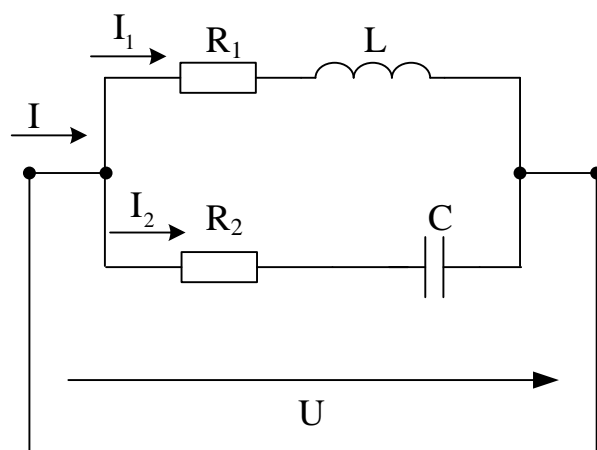


Рисунок 5.44

При параллельном соединении для вывода условия резонанса удобно использовать проводимости. Общее условие резонанса: $\varphi = 0$ при наличии в цепи L и C – остается в силе.

$$\underline{Y}_3 = G_3 - jB_3; \varphi = \operatorname{arctg} \frac{B_3}{G_3}.$$

При резонансе $\varphi=0$, следовательно:

$$B_3 = B_1 + B_2 = \frac{\omega_0 L}{R_1^2 + (\omega_0 L)^2} + \frac{-\frac{1}{\omega_0 C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)^2} = 0.$$

Найдем выражение резонансной частоты:

$$\frac{\omega_0 L}{R_1^2 + \omega_0^2 L^2} = \frac{\omega_0 C}{R_2^2 \omega_0^2 C^2 + 1}; L(R_2^2 \omega_0^2 C^2 + 1) = C(R_1^2 + \omega_0^2 L^2);$$

$$R_2^2 \omega_0^2 L C^2 + L = C R_1^2 + \omega_0^2 L^2 C; L - R_1^2 C = \omega_0^2 L C (L - R_2^2 C);$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \cdot \frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}; \rho = \sqrt{\frac{L}{C}};$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}} \quad (5.62)$$

Выражение резонансной частоты при параллельном соединении, в общем случае, более сложное, чем при последовательном соединении, причем в него входят и активные сопротивления.

Исследуем полученное выражение ω_0 .

1) Если $(R_1 > \rho$ и $R_2 > \rho)$ или $(R_1 < \rho$ и $R_2 < \rho)$, то под корнем – положительное число, резонанс возможен при одной частоте ω_0 .

2) Если $(R_1 > \rho$, а $R_2 < \rho)$ или $(R_1 < \rho$, а $R_2 > \rho)$, то под корнем – отрицательное число, резонанс невозможен ни при какой частоте.

3) Если $R_1 = R_2 \neq \rho$, то $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – такая же резонансная частота, как и при последовательном соединении R, L, C . Частный случай, когда $R_1 = R_2 = 0$, будет рассмотрен ниже.

4) Если $R_1 = R_2 = \rho$, то под корнем неопределенность типа $0/0$, а резонанс наблюдается при любой частоте (безразличный резонанс).

В общем случае при резонансе в такой цепи векторная диаграмма выглядит следующим образом (рис. 5.45):

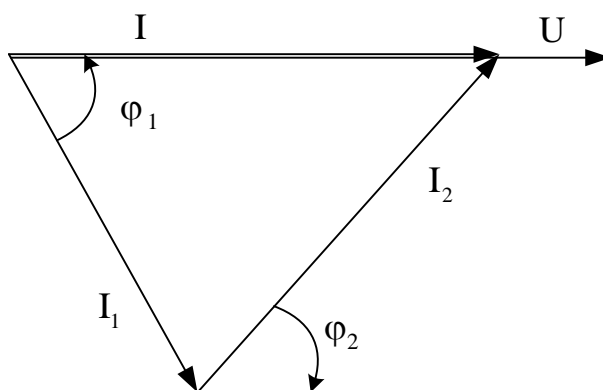


Рисунок 5.45

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega L}{R_1} > 0;$$

$$\varphi_2 = \arctg \left(-\frac{1}{\omega C R_2} \right) < 0;$$

$$\varphi = \arctg \frac{B_3}{G_3} = 0.$$

Общий ток по величине $I = U G_3 = U \left[\frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2} \right]$ и сов-

падает по фазе с напряжением.

На практике часто активные проводимости значительно меньше реактивных (по модулю), поэтому токи в параллельных ветвях могут во много раз превосходить ток в неразветвленной части цепи. Резонанс при параллельном соединении называют резонансом токов.

С физической точки зрения, и при этом типе резонанса происходит обмен энергиями электрического и магнитного полей, причем суммарная энергия полей остается постоянной и не пополняется за счет источника.

От источника потребляется только активная мощность, которая превращается в тепло в резисторах.

Идеальный параллельный колебательный контур

Рассмотрим частный случай резонанса при параллельном соединении, когда $R_1 = R_2 = 0$ (рис. 5.46).

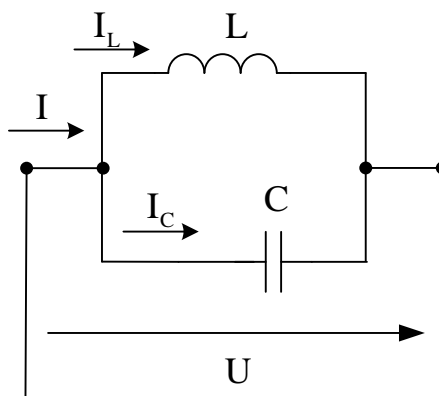


Рисунок 5.46

Условие резонанса $B_3=0$, $B_1 = \frac{1}{\omega L}$; $B_2 = -\omega C$. При резонансе $B_1+B_2=0$, т.е. $\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C$. Резонансная частота: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Поскольку отсутствуют активные сопротивления, то активная проводимость $G_3=0$. Полная проводимость и общий ток тоже равны нулю: $y_3 = 0$, $I = 0$. Токи I_L и I_C равны по величине и противоположны по фазе (рис. 5.47).

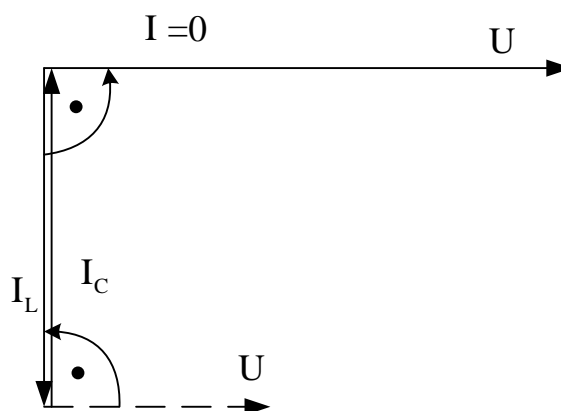


Рисунок 5.47

Такая цепь называется фильтром – «пробкой». Она не пропускает тока частоты ω_0 . Внутри контура циркулирует ток, и происходят колебания энергии между электрическим и магнитным полем.

Понятие о резонансе в сложных цепях

При определенных условиях резонанс возможен в любой цепи, содержащей реактивные элементы различного характера, но чем сложнее цепь, тем сложнее найти условие резонанса. В общем случае условие резонанса выводится на том основании, что в ком-

плексе полного сопротивления цепи должна отсутствовать реактивная составляющая:

$$x_3=0; \underline{Z}_3 = R_3.$$

Приведем пример.

Каким будет условие резонанса в этой простой цепи, где L и C не соединены ни последовательно, ни параллельно (рис. 5.48).

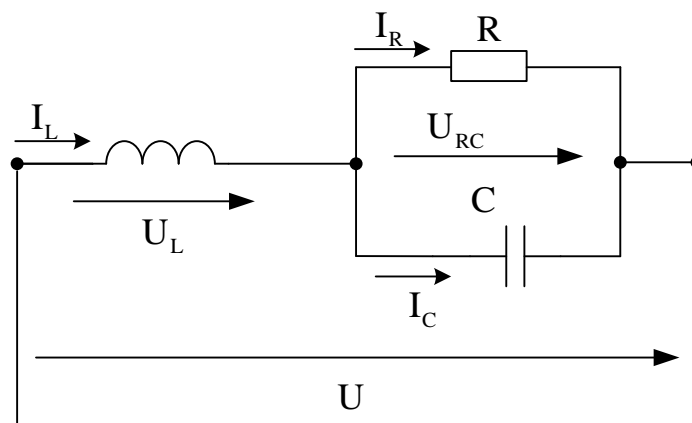


Рисунок 5.48

Запишем комплекс полного сопротивления цепи и преобразуем его для выделения вещественной и мнимой частей.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= j\omega L + \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{j\omega CR + 1} = j\omega L + \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + \omega^2 C^2 R^2} = \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} + \\ &+ j \left(\omega L - \frac{\omega CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right) = R_y + jX_y. \end{aligned}$$

При резонансе вся цепь должна быть чисто активной, т.к.

$$\varphi_y = \arctg \frac{x_y}{R_y} = 0.$$

Следовательно, условием резонанса является:

$$X_y = \omega L - \frac{\omega CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} = 0.$$

На векторной диаграмме резонанс в любой цепи выражается в том, что общий ток совпадает по фазе с общим напряжением при наличии в цепи реактивных элементов (рис. 5.49).

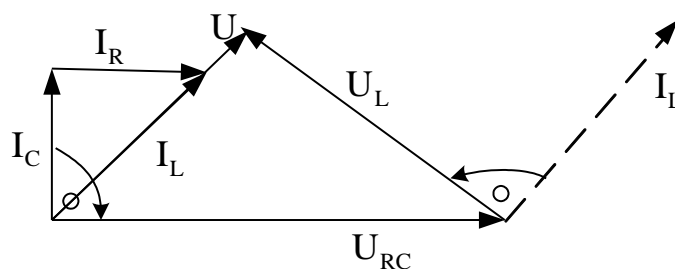


Рисунок 5.49

5.32. Цепи переменного тока с индуктивными связями

До сих пор мы рассматривали цепи с сосредоточенными параметрами R , L , C , не учитывая индуктивные связи между элементами цепи. В действительности, при близком расположении двух или нескольких индуктивных элементов, они могут влиять друг на друга своими магнитными полями.

Это влияние проявляется в том, что переменный ток, протекающий в одном контуре, создает переменный магнитный поток, сцепленный не только с этим контуром, но и со вторым контуром, в котором возникает ЭДС взаимной индукции.

Как уже известно из раздела «Физические основы электротехники», полное потокосцепление каждого из двух индуктивно связанных контуров (катушек индуктивности) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M i_2; \\ \Psi_2 &= \Psi_{22} \pm \Psi_{21} = L_2 i_2 \pm M i_1.\end{aligned}\quad (5.63)$$

Здесь знак «плюс» относится к случаю согласной магнитной связи, знак «минус» - к случаю встречной связи.

Если токи i_1 и i_2 – переменные, то в каждой катушке возникают ЭДС индукции, включающие в себя как ЭДС самоиндукции, так и ЭДС взаимной индукции:

$$\begin{aligned}e_1 &= -\frac{d\Psi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt} = e_{L_1} \pm e_{m_1}; \\ e_2 &= -\frac{d\Psi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt} = e_{L_2} \pm e_{m_2}\end{aligned}\quad (5.64)$$

На преодоление этих ЭДС источники затрачивают напряжения, равные им по величине и противоположные по знаку:

$$\begin{aligned}
 u_{1 \text{ инд}} &= -e_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \\
 u_{2 \text{ инд}} &= -e_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.
 \end{aligned}
 \tag{5.65}$$

Знак «+» соответствует согласной магнитной связи, знак «-» - встречной магнитной связи.

Для обозначения на схемах согласной или встречной магнитной связи используется понятие об одноименных зажимах катушек индуктивности.

Два зажима двух катушек называются одноименными, если при одновременном втекании токов в эти зажимы собственный и взаимный магнитные потоки в каждой катушке складываются. Эти зажимы обозначаются одинаковыми значками (* или •) (рис. 5.50).

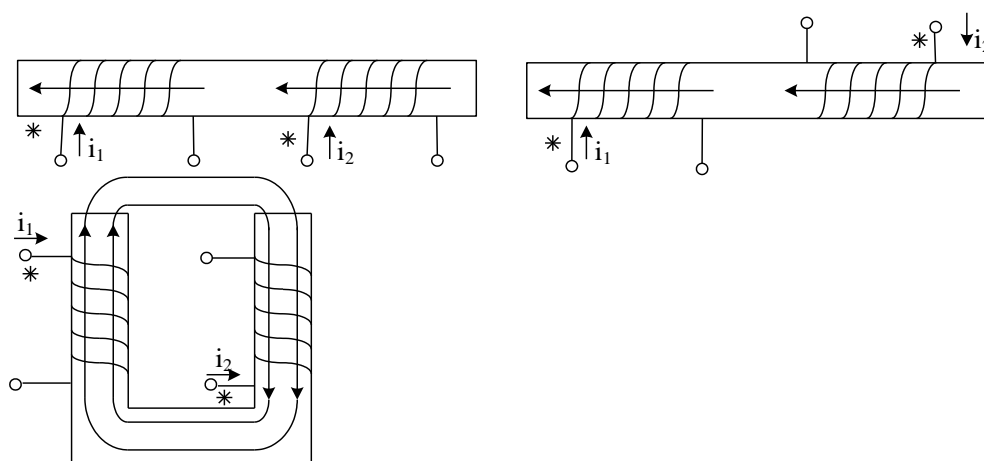


Рисунок 5.50

Магнитная связь между катушками на схеме обозначается стрелкой (рис. 5.51).

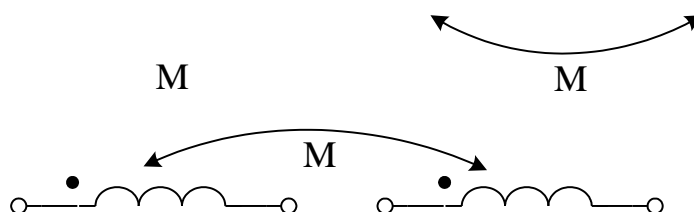


Рисунок 5.51

Рассмотрим конкретные примеры.

Последовательное соединение индуктивно связанных катушек

1) Согласное включение

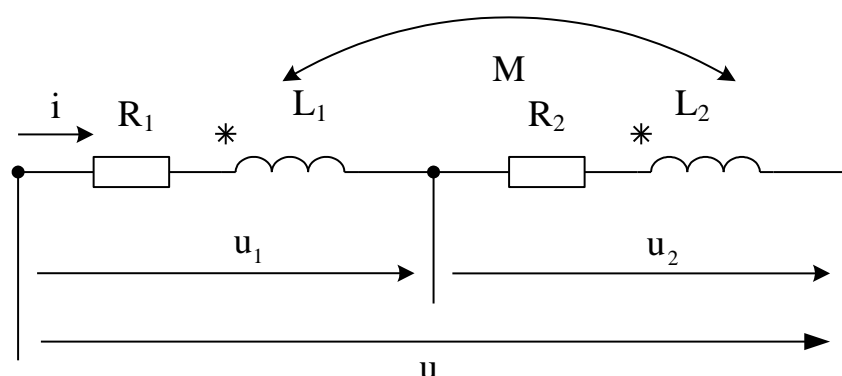


Рисунок 5.52

Потокосцепление катушек запишем следующим образом (ток i одинаков в обеих катушках):

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \Psi_{11} + \Psi_{12} = L_1 i + M i; \\ \Psi_2 &= \Psi_{22} + \Psi_{21} = L_2 i + M i.\end{aligned}$$

Напряжение на катушках:

$$\begin{aligned}u_1 &= R_1 i + \frac{d\Psi_1}{dt} = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}; \\ u_2 &= R_2 i + \frac{d\Psi_2}{dt} = R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}.\end{aligned}\tag{5.66}$$

Напряжение каждой катушки расходуется на падение напряжения в ее активном сопротивлении, на преодоление ЭДС самоиндукции и на преодоление ЭДС взаимной индукции.

Общее напряжение:

$$u = u_1 + u_2 = (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}\tag{5.67}$$

Эти уравнения справедливы для любого закона изменения во времени напряжения и тока. В частности, если $u(t)$ синусоидально, то $i(t)$ также будет синусоидальным, и их можно изобразить комплексами.

При дифференцировании синусоидальных функций времени их комплексы умножают на $j\omega$:

$$i(t) \rightarrow \underline{I}; \quad \frac{di}{dt} \rightarrow j\omega \underline{I}.$$

Запишем уравнения в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I} + j\omega(L_1 + M)\underline{I}; \quad L_{1C} = L_1 + M; \\ \underline{U}_2 &= R_2 \underline{I} + j\omega(L_2 + M)\underline{I}; \quad L_{2C} = L_2 + M. \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{I}[(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)]; \\ R_3 &= R_1 + R_2; \quad L_{3C} = L_1 + L_2 + 2M. \end{aligned} \quad (5.68a)$$

$$\underline{Z}_{\tilde{y}\tilde{N}} = R_y + j\omega L_{\tilde{y}\tilde{N}}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\tilde{y}\tilde{N}}}.$$

При согласованном включении эквивалентная индуктивность каждой катушки увеличивается на величину M , а эквивалентная индуктивность всей цепи – на величину $2M$.

Векторная диаграмма цепи выглядит следующим образом (рис. 5.53):

$$\begin{aligned} \varphi_{1C} &= \arctg \frac{\omega(L_1 + M)}{R_1} > 0; \\ \varphi_{2C} &= \arctg \frac{\omega(L_2 + M)}{R_2} > 0; \\ \varphi_C &= \arctg \frac{\omega(L_1 + L_2 + 2M)}{R_1 + R_2} > 0. \end{aligned}$$

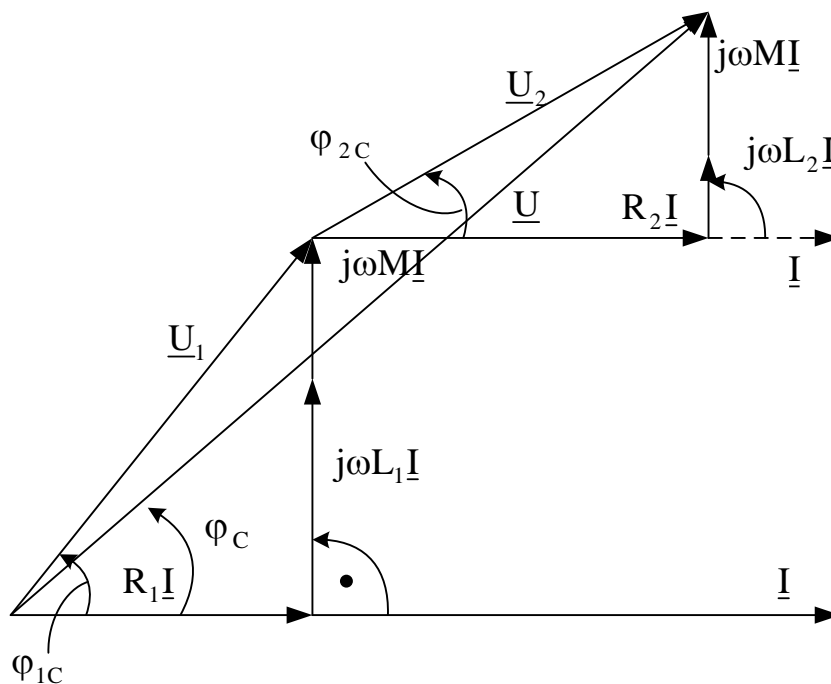


Рисунок 5.53

Каждая катушка и вся цепь в целом носят индуктивный характер.

2) Встречное включение (рис. 5.54)

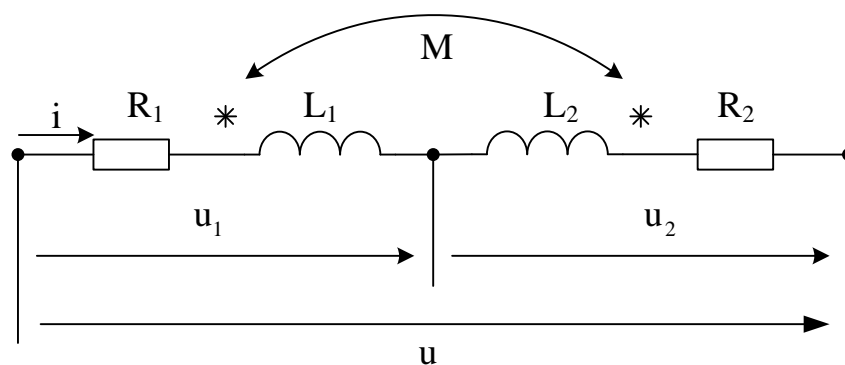


Рисунок 5.54

Потокосцепления:

$$\Psi_1 = \Psi_{11} - \Psi_{12} = L_1 i - M i;$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} - \Psi_{21} = L_2 i - M i.$$

Мгновенные значения напряжений:

$$\begin{aligned}
u_1 &= R_1 i + \frac{d\Psi_1}{dt} = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}; \\
u_2 &= R_2 i + \frac{d\Psi_2}{dt} = R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}; \\
u &= u_1 + u_2 = (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}.
\end{aligned}$$

Уравнения в комплексной форме при синусоидальных $u(t)$ и $i(t)$:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= R_1 \underline{I} + j\omega(L_1 - M)\underline{I}; \quad L_{1\epsilon} = L_1 - M; \\
\underline{U}_2 &= R_2 \underline{I} + j\omega(L_2 - M)\underline{I}; \quad L_{2\epsilon} = L_2 - M. \\
\underline{U} &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{I}[(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)].
\end{aligned}$$

$$R_3 = R_1 + R_2; \quad L_{3\epsilon} = L_1 + L_2 - 2M. \quad (5.69)$$

$$\underline{Z}_{\dot{y}\dot{a}} = R_{\dot{y}} + j\omega L_{\dot{y}\dot{a}}; \quad \underline{I}_{\dot{a}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\dot{y}\dot{a}}}.$$

$$L_{3\epsilon} < L_{3c}; \quad X_{3\epsilon} < X_{3c}; \quad Z_{3\epsilon} < Z_{3c};$$

При одном и том же напряжении $I_{\epsilon} < I_{\text{в}}$. Это соотношение можно использовать для экспериментального определения одноименных зажимов катушек.

Можно доказать, что $L_{3\epsilon}$ всегда положительно, хотя одна из эквивалентных индуктивностей может быть отрицательной.

Построим векторную диаграмму для случая: $L_1 > M$; $L_2 < M$; $L_{1\epsilon} > 0$; $L_{2\epsilon} < 0$ (рис. 5.55).

$$\begin{aligned}
\varphi_{1\epsilon} &= \arctg \frac{\omega(L_1 - M)}{R_1} > 0; \\
\varphi_{2\epsilon} &= \arctg \frac{\omega(L_2 - M)}{R_2} < 0; \\
\varphi_{3\epsilon} &= \arctg \frac{\omega(L_1 + L_2 - 2M)}{R_1 + R_2} > 0.
\end{aligned}$$

Вторая катушка носит как бы емкостный характер. Первая катушка и вся цепь в целом имеют индуктивный характер.

Все другие цепи с индуктивными связями являются сложными цепями, т.к. напряжение на каждой катушке зависит от двух различных токов, и расчет по закону Ома невозможен.

Для расчета таких цепей используют законы Кирхгофа и различные специальные методы.

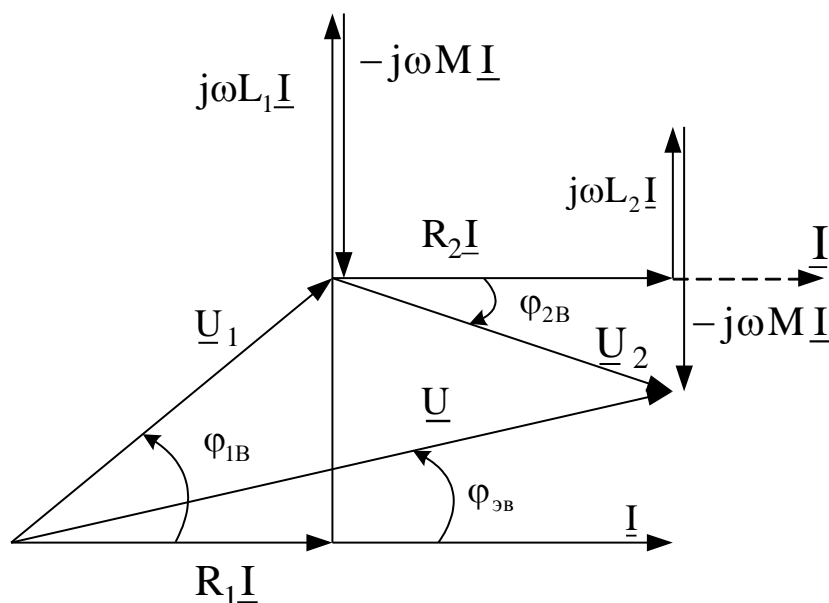


Рисунок 5.55

Воздушный трансформатор

Трансформатором называется статический электрический аппарат, предназначенный для передачи мощности от источника к приемнику через магнитное поле. При этом напряжения и токи изменяются по величине при неизменной частоте. Если трансформатор не содержит стального сердечника, он называется воздушным трансформатором и является линейным элементом электрической цепи (рис. 5.56).

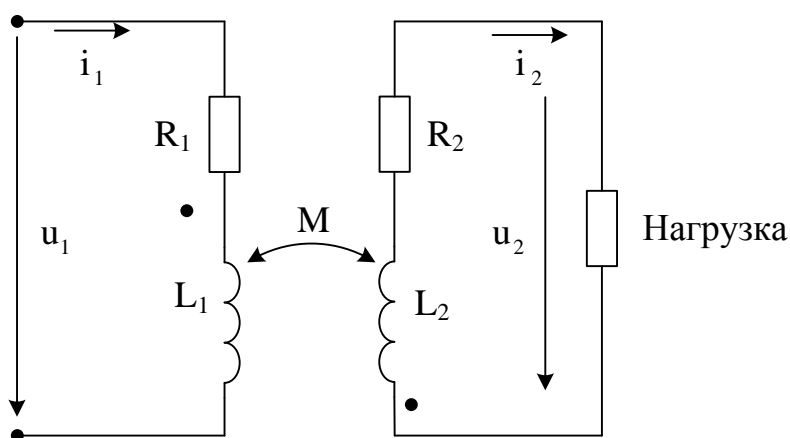


Рисунок. 5.56

Катушка, присоединенная к генератору, называется первичной обмоткой трансформатора, все величины в первичной цепи имеют индекс 1. Катушка, подключенная к нагрузке, называется вторичной обмоткой, и все величины во вторичной цепи имеют индекс 2.

При переменном напряжении u_1 на входе трансформатора в первичной обмотке появится переменный ток i_1 , который создаст переменный магнитный поток. Этот поток вызовет в первичной цепи ЭДС самоиндукции $e_{L_1} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$, а во вторичной обмотке – ЭДС взаимной индукции $e_{M_2} = -M \frac{di_1}{dt}$, а на ее зажимах напряжение $u_2 = e_{M_2}$. Если цепь вторичной обмотки замкнута, то в ней под воздействием ЭДС взаимной индукции появляется тоже переменный ток, который создает свой магнитный поток. Этот поток вызывает во вторичной цепи ЭДС самоиндукции $e_{L_2} = -L_2 \frac{di_2}{dt}$, а в первичной цепи – ЭДС взаимной индукции $e_{M_1} = -M \frac{di_2}{dt}$.

Для поддержания тока в первичной цепи, источник должен преодолеть падение напряжения на активном сопротивлении, ЭДС самоиндукции и ЭДС взаимной индукции, для чего понадобятся напряжения, равные этим ЭДС по величине и противоположные им по знаку.

Во вторичной цепи источником является ЭДС взаимной индукции, и она преодолевает падение напряжения на активном сопротивлении, ЭДС самоиндукции и поддерживает напряжение на нагрузке.

Таким образом, из физических соображений можно записать для мгновенных значений такие уравнения электрического равновесия:

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \\ -M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + u_2. \end{cases} \quad (5.70)$$

Если $u_1(t)$ синусоидально, то и все остальные токи и напряжения будут синусоидальными, и можно перейти к комплексной форме записи:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2; \\ -j\omega M \underline{I}_1 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2; \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_H \underline{I}_2. \end{cases} \quad (5.71)$$

Эти уравнения можно решить относительно токов \underline{I}_1 и \underline{I}_2 . Токи обычно сдвинуты по фазе на угол, близкий к 180° , т.к. вторичный ток оказывает размагничивающее действие, согласно закону электромагнитной индукции.

Построим векторную диаграмму воздушного трансформатора при нагрузке (рис. 5.57). Пусть для определенности $\varphi_H > 0$ - нагрузка носит индуктивный характер. Порядок построения:

$$\underline{I}_2 \rightarrow \underline{U}_2(\varphi_H) \rightarrow R_2 \underline{I}_2 \rightarrow j\omega L_2 \underline{I}_2 \rightarrow -j\omega M \underline{I}_1 \rightarrow \underline{I}_1 \rightarrow R_1 \underline{I}_1 \rightarrow j\omega L_1 \underline{I}_1 \rightarrow j\omega M \underline{I}_2 \rightarrow \underline{U}_1.$$

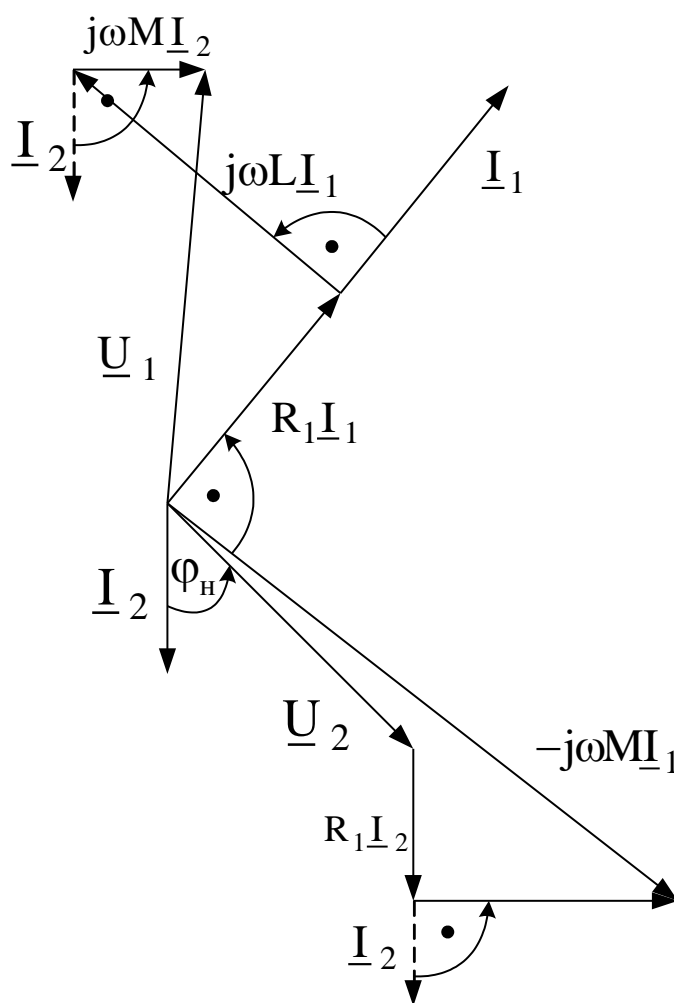


Рисунок 5.57

6. НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТОКИ И НАПРЯЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Часто в электрических цепях периодические токи и напряжения по форме отличаются от синусоидальных. Если при этом электрическая цепь линейна, то несинусоидальную ЭДС раскладывают в ряд Фурье и к расчету цепи применяют принцип наложения. Полученные результаты определенным образом складывают.

Пусть имеется периодическая несинусоидальная функция $f(t) = f(t \pm kT)$, где T – период. Она может быть представлена в виде ряда Фурье следующим образом:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t. \quad (6.1)$$

Коэффициенты ряда вычислим по формулам:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt; C_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt. \quad (6.2)$$

Если обозначить $A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}$; $\psi_k = \arctg \frac{C_k}{B_k}$, то ряд (6.2) можно записать в виде:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \psi_k). \quad (6.3)$$

Такая форма записи наиболее распространена. В ней называют:

A_0 - постоянной составляющей;

$A_1 \sin(\omega t + \psi_1)$ - первой гармоникой;

$A_k \sin(k\omega t + \psi_k)$ - высшими гармониками при $k > 1$.

Число членов разложения на практике ограничивают некоторым n .

Для расчета линейной цепи от действия каждой гармоники э.д.с. в отдельности применимы все методы, известные из теории цепей гармонического тока, в том числе и метод комплексных амплитуд.

Однако при этом надо учитывать, что реактивные сопротивления зависят от частоты:

$$X_{LK} = k\omega L; X_{CK} = \frac{1}{k\omega C}.$$

Для постоянной составляющей тока индуктивность не оказывает сопротивления (закоротка), а конденсатор не пропускает постоянного тока (разрыв цепи).

После расчета цепи для каждой гармоники в отдельности мгновенные значения тока или напряжения складываются, а действующие значения токов или напряжений от различных гармоник складывать нельзя.

Можно доказать, что действующие значения несинусоидальных токов или напряжений нужно определять по формулам:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^n I_{(k)}^2}; U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^n U_{(k)}^2}. \quad (6.4)$$

Активные мощности отдельных гармоник складываются:

$$P = P_0 + \sum P_{(k)} \quad (6.5)$$

Пример (рис. 6.1)

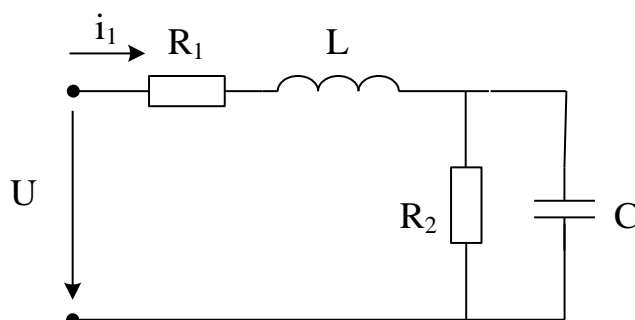


Рисунок 6.1

Пусть $u(t) = U_0 + U_{m(1)} \sin \omega t + U_{m(3)} \sin(3\omega t + 30^\circ)$.

Найдем мгновенное значение тока i_1 , действующее значение этого же тока I_1 и активную мощность цепи.

Расчет ведем для каждой гармоники напряжения.

1. От действия U_0 : $R_0 = R_1 + R_2$; $I_0 = \frac{U_0}{R_0}$; $P_0 = U_0 I_0$.

2. От первой гармоники $u_{(1)} = U_{m(1)} \sin \omega t$:

$$\underline{Z}_{(1)} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{R_2 \left(-j \frac{1}{\omega C_2} \right)}{R_2 - j \frac{1}{\omega C_2}} = R_{(1)} + jX_{(1)} = z_{(1)} e^{j\varphi_{(1)}}.$$

$$\underline{I}_{1m(1)} = \frac{U_{1m}}{\underline{Z}_{(1)}} = I_{1m(1)} e^{-j\varphi_{(1)}}; \quad \underline{I}_{1(1)} = \frac{I_{1m(1)}}{\sqrt{2}};$$

$$i_{1(1)} = I_{1m(1)} \sin(\omega t - \varphi_{(1)}); \quad U_{(1)} = \frac{U_{m(1)}}{\sqrt{2}}.$$

$$P_{(1)} = U_{(1)} I_{1(1)} \cos \varphi_{(1)}.$$

3. От третьей гармоники $u_{(3)} = U_{m(3)} \sin(3\omega t + 30^\circ)$.

$$\underline{Z}_{(3)} = R_1 + j3\omega L_1 + \frac{R_2 \cdot \left(-j \frac{1}{3\omega C_2} \right)}{R_2 - j \frac{1}{3\omega C_2}} = R_{(3)} + jX_{(3)} = z_{(3)} e^{j\varphi_{(3)}}.$$

$$\underline{I}_{1m(3)} = \frac{U_{m(3)} e^{j30^\circ}}{\underline{Z}_{(3)} e^{j\varphi_{(3)}}} = I_{1m(3)} e^{j(30^\circ - \varphi_{(3)})};$$

$$i_{1(3)} = I_{1m(3)} \cdot \sin(3\omega t + 30^\circ - \varphi_{(3)});$$

$$I_{1(3)} = \frac{I_{1m(3)}}{\sqrt{2}}; \quad U_{(3)} = \frac{U_{m(3)}}{\sqrt{2}};$$

$$P_{(3)} = U_{(3)} I_{1(3)} \cos \varphi_{(3)}.$$

Мгновенное значение тока в первой ветви:

$$i_1 = I_0 + i_{1(1)} + i_{1(3)}.$$

Действующее значение этого тока:

$$I_1 = \sqrt{I_0^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2}.$$

Активная мощность цепи:

$$P = P_0 + P_{(1)} + P_{(3)}.$$

7. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Многофазной электрической цепью называется совокупность электрических цепей, в которых действуют ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе и вырабатываемые общим источником.

Отдельные электрические цепи, входящие в состав многофазной цепи, называются фазами. Чтобы отличать фазы друг от друга, их обозначают цифрами (1, 2, 3) или буквами (А, В, С).

Совокупность ЭДС, токов или напряжений, действующих в многофазной цепи, называют многофазными системами ЭДС, токов или напряжений.

В технике наибольшее распространение получили трехфазные цепи, поэтому далее будем говорить только о трехфазных цепях и системах величин.

7.1. Получение трехфазной системы ЭДС

На статоре расположены три обмотки одинаковой конструкции, смещенные в пространстве на углы 120° . При вращении ротора в них наводятся ЭДС, одинаковые по амплитуде и частоте и сдвинутые друг относительно друга по фазе на $1/3$ периода, т.е. на $\frac{2\pi}{3}$ или 120° .

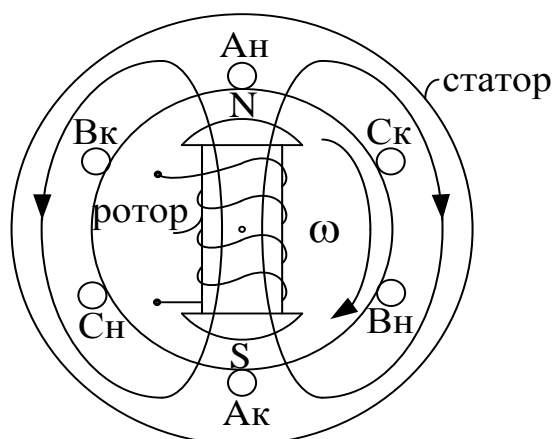


Рисунок 7.1

Каждая обмотка генератора называется его фазой. Нарисуем графики этих ЭДС (рис. 7.2).

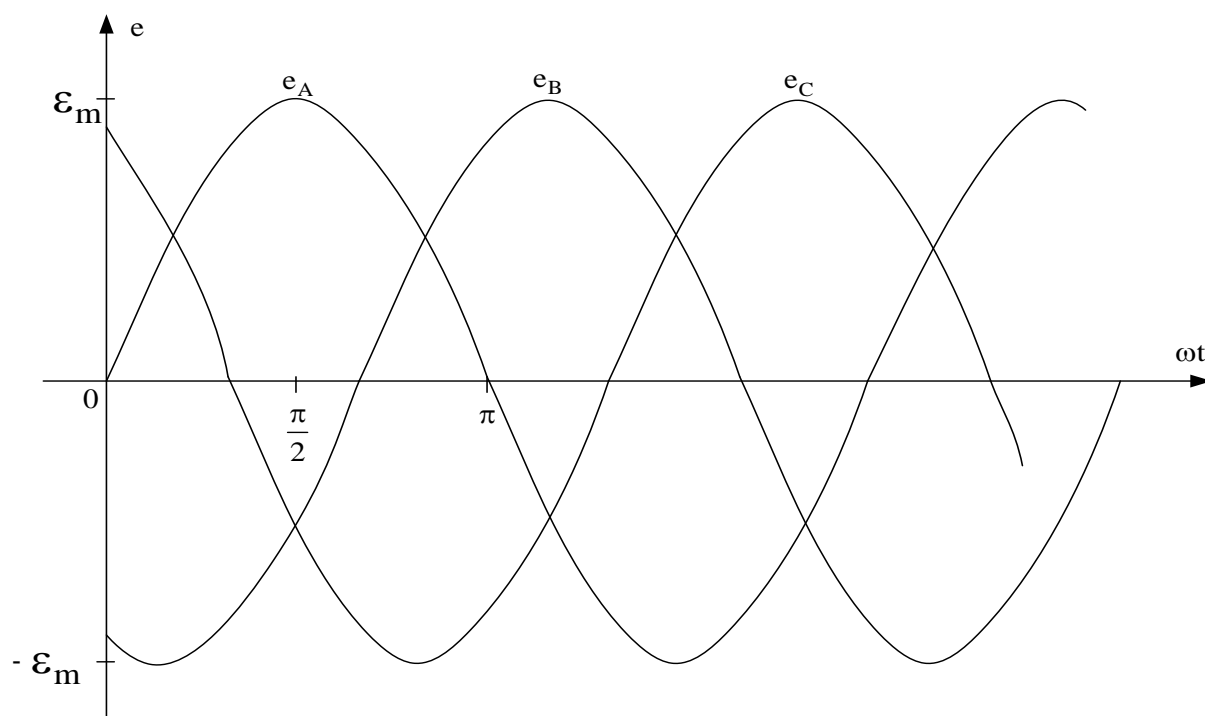


Рисунок 7.2

Трехфазная система величин (ЭДС., токов или напряжений), в которой все величины одинаковы по амплитуде и каждая последующая величина отстает от предыдущей по фазе на 120° , называется симметричной трехфазной системой прямой последовательности.

Важным свойством величин, входящих в такую симметричную трехфазную систему, является то, что сумма их мгновенных значений в любой момент времени равна нулю.

Докажем, что $e_A + e_B + e_C = 0$, с помощью векторной диаграммы (рис.7.3).

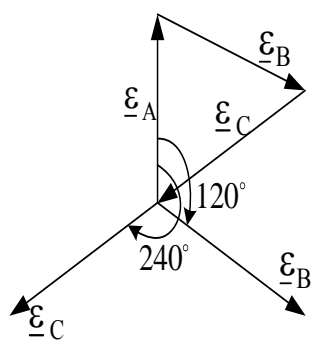


Рисунок 7.3

Поскольку геометрическая сумма векторов равна нулю, то равна нулю и сумма мгновенных значений.

Запишем мгновенные значения:

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega t; \\ e_B &= E_m \sin(\omega t - 120^\circ); \\ e_C &= E_m \sin(\omega t - 240^\circ). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Действующее значение ЭДС $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$.

Запишем комплексы действующих значений ЭДС:

$$\begin{aligned} \underline{E}_A &= E_A = E; \\ \underline{E}_B &= \underline{E}_A e^{-j120^\circ} = E e^{-j120^\circ}; \\ \underline{E}_C &= \underline{E}_A e^{-j240^\circ} = E e^{-j240^\circ}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

В теории трехфазных цепей принято обозначать $a = e^{j120^\circ}$; эта величина называется оператором поворота, т.к. умножение комплекса на эту величину приводит к повороту ее вектора на 120° против часовой стрелки.

Итак:

$$\begin{aligned} a &= e^{j120^\circ} = e^{-j240^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ a^2 &= e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ a^3 &= e^{j360^\circ} = e^{j0^\circ} = 1; \\ 1 + a + a^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Геометрическая интерпретация соотношений (7.3) дана на рис. 7.4.

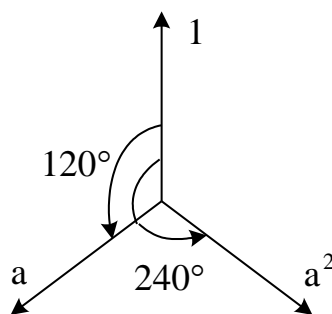


Рисунок 7.4

Таким образом, $\underline{E}_A = E$; $\underline{E}_B = Ea^2$; $\underline{E}_C = Ea$.

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E(1 + a^2 + a) = 0. \quad (7.4)$$

Если отдельные фазы трехфазной цепи не соединены друг с другом, трехфазная цепь называется несвязанной; в противном случае цепь называется связанной.

Связывание трехфазных цепей осуществляется при помощи двух схем – схемы «звезды» и схемы «треугольника».

В трехфазных генераторах, как правило, используется схема «звезды», а в трехфазных приемниках (нагрузках) применяют обе схемы связывания.

Связанные трехфазные цепи имеют ряд важных преимуществ перед несвязанными, а именно:

- 1) экономия проводящих материалов (вместо шести проводов – три или четыре);
- 2) возможность использования двух систем напряжений – фазные и линейные напряжения;
- 3) возможность создания вращающегося магнитного поля.

Благодаря этим преимуществам в энергетике применяется только связанные трехфазные цепи.

7.2. Соотношения между линейными и фазными величинами

ЭДС, наводимые в фазах генератора, напряжения на их зажимах и токи в них, а также напряжения на фазах приемника и токи в них называются фазными ЭДС, напряжениями и токами.

Токи в проводах линии, соединяющей генератор с нагрузкой, и напряжения между линейными проводами называются линейными токами и напряжениями.

Для всех токов и напряжений приняты определенные положительные направления.

В схеме «звезды» фазные напряжения направляют от зажимов генератора или нагрузки к соответствующим нейтралям. Линейные напряжения принято направлять от предыдущей фазы к последующей. Линейные токи направляют от нейтрали генератора 0 к нейтрали нагрузки 0', ток в нейтральном проводе – от нейтрали нагрузки к нейтрали генератора (рис. 7.5).

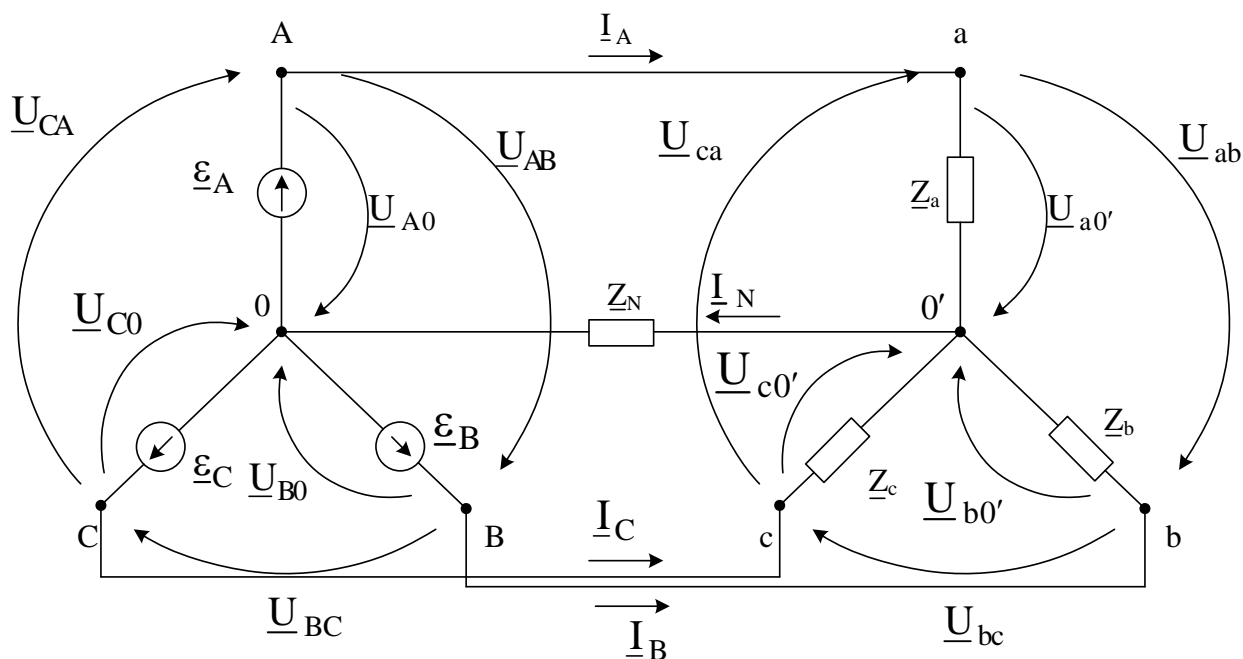


Рисунок 7.5

На рисунке:

0 – нейтраль генератора;

0' – нейтраль нагрузки;

$\underline{U}_{A0}, \underline{U}_{B0}, \underline{U}_{C0}$ – фазные напряжения генератора;

$\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ – линейные напряжения генератора;

$\underline{U}_{a0'}, \underline{U}_{b0'}, \underline{U}_{c0'}$ – фазные напряжения нагрузки;

$\underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}$ – линейные напряжения на нагрузке или линейные напряжения в конце линии;

$\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ – линейные токи, но они протекают и в фазах генератора и нагрузки, поэтому при соединении «звездой» $I_L = I_\Phi$.

Для вывода соотношения напряжений запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для контура ab0'a : $\underline{U}_{ab} + \underline{U}_{b0'} - \underline{U}_{a0'} = 0$, отсюда:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{a0'} - \underline{U}_{b0'}. \quad (7.5)$$

Линейное напряжение в схеме «звезды» равно геометрической разности фазных напряжений.

Для частного случая, когда система напряжений симметрична, найдем соотношение величин напряжений с помощью векторной диаграммы (рис. 7.6).

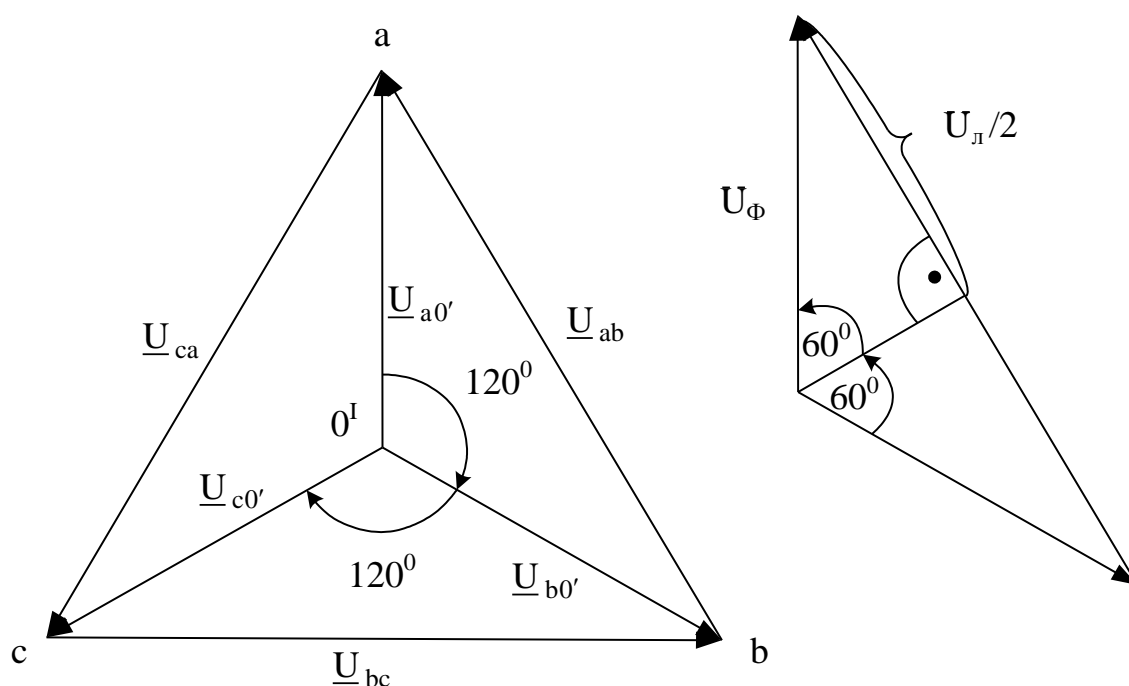


Рисунок 7.6

$$\frac{U_L}{2} = U_\Phi \sin 60^\circ = U_\Phi \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$U_L = U_\Phi \sqrt{3}. \quad (7.5.a)$$

Полученное соотношение справедливо и для симметричной системы напряжений генератора: $U_{ЛГ} = U_{ФГ} \sqrt{3}$.

Рассмотрим схему соединения «треугольником» (рис. 7.7). В схеме «треугольника» фазные величины направляют от предыдущей фазы к последующей.

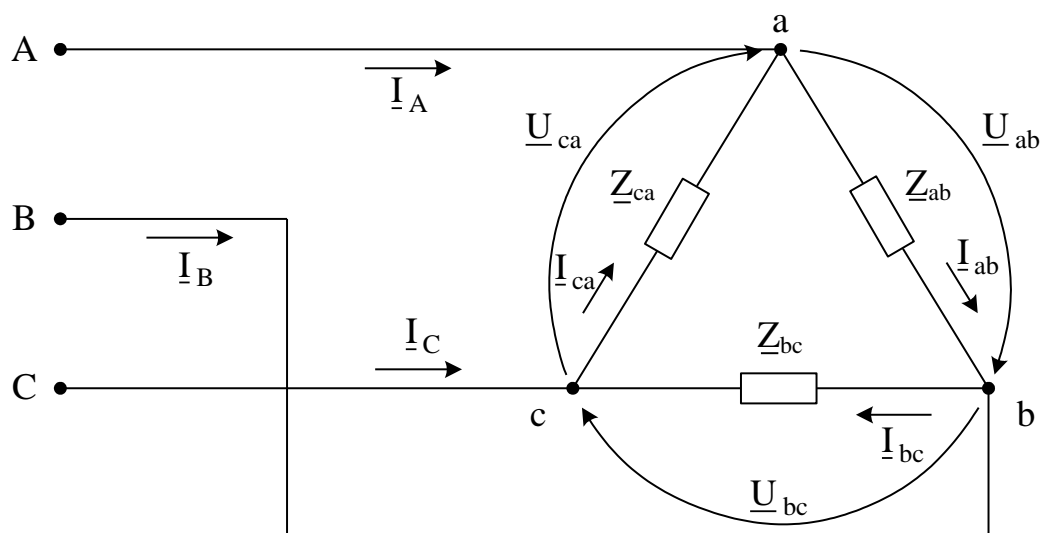


Рисунок 7.7

На рисунке:

$\underline{I}_{ab}, \underline{I}_{bc}, \underline{I}_{ca}$ – фазные токи;

$\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ – линейные токи;

$\underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}$ – фазные напряжения на нагрузке и одновременно линейные напряжения в конце линии.

Таким образом, при соединении «треугольником» $U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}$.

Для вывода связи между токами запишем для узла a первый закон Кирхгофа: $-\underline{I}_A - \underline{I}_{ca} + \underline{I}_{ab} = 0$, отсюда

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}. \quad (7.6)$$

Линейный ток равен геометрической разности фазных токов.

Если система токов симметрична, ее векторная диаграмма будет выглядеть следующим образом (рис. 7.8).

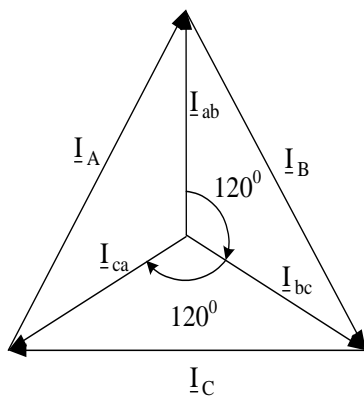


Рисунок 7.8

Аналогично соотношению в симметричной системе напряжений можно получить, что

$$I_{\text{Л}} = I_{\Phi} \sqrt{3}. \quad (7.6a)$$

7.3. Расчет трехфазных цепей

Трехфазная цепь представляет собой сложную цепь переменного тока, к расчету которой применимы все методы расчета сложных цепей.

Рассмотрим схему, к которой могут быть преобразованы любые сложные трехфазные цепи (рис. 7.9).

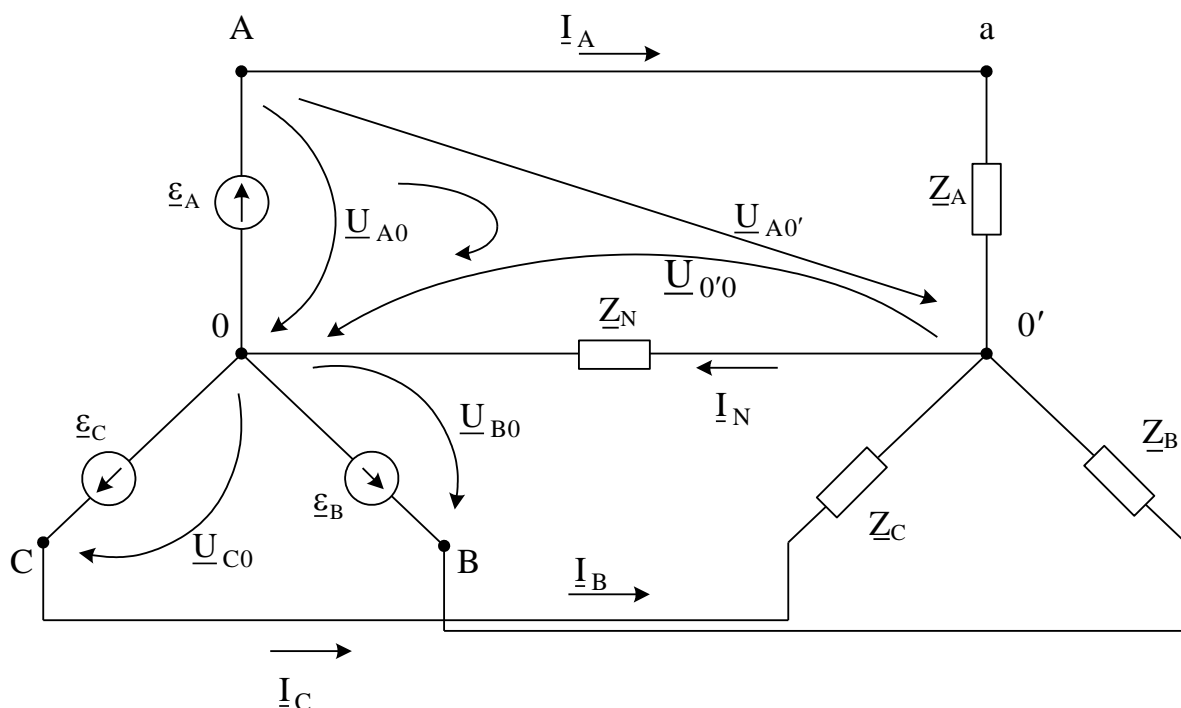


Рисунок 7.9

Эта цепь имеет четыре ветви и два узла, следовательно, по первому закону Кирхгофа и по методу узловых потенциалов для нее нужно составить одно уравнение, а по второму закону Кирхгофа и по методу контурных токов – три уравнения. Поэтому применим метод узловых потенциалов в комплексной форме записи.

Примем $\underline{\varphi}_0 = 0$. Тогда $\underline{\varphi}_{0'} = \underline{U}_{0'0}$ - напряжение смещения нейтрали

$$\underline{U}_{0'0}(\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N) = \underline{E}_A \underline{Y}_A + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C;$$

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_A + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}. \quad (7.7)$$

Если считать, что сопротивления обмоток генератора малы по сравнению с сопротивлениями нагрузки, то можно пренебречь падениями напряжения в обмотках генератора и принять, что:

$$\underline{E}_A = \underline{U}_{A0}; \underline{E}_B = \underline{U}_{B0}; \underline{E}_C = \underline{U}_{C0}. \quad (7.8)$$

Выражение напряжения смещения нейтрали примет следующий вид:

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\underline{U}_{A0} \underline{Y}_A + \underline{U}_{B0} \underline{Y}_B + \underline{U}_{C0} \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}. \quad (7.9)$$

Зная смещение нейтрали, можно определить фазные напряжения на нагрузке (вместе с линией) по второму закону Кирхгофа: $\underline{U}_{A0'} + \underline{U}_{0'0} - \underline{U}_{A0} = 0$, откуда

$$\underline{U}_{A0'} = \underline{U}_{A0} - \underline{U}_{0'0}. \quad (7.10)$$

Аналогично: $\underline{U}_{B0'} = \underline{U}_{B0} - \underline{U}_{0'0}$; $\underline{U}_{C0'} = \underline{U}_{C0} - \underline{U}_{0'0}$.

Токи в фазах находят с помощью закона Ома:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{A0'} \underline{Y}_A; \underline{I}_B = \underline{U}_{B0'} \underline{Y}_B; \underline{I}_C = \underline{U}_{C0'} \underline{Y}_C. \quad (7.11)$$

Ток в нейтральном проводе определим по закону Ома или по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_N = \underline{U}_{0'0} \underline{Y}_N \text{ или } \underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C \quad (7.12)$$

Если нейтральный провод отсутствует, то $\underline{Y}_N = 0$; $\underline{I}_N = 0$ и

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0. \quad (7.12a)$$

Если нейтральный провод не имеет сопротивления ($\underline{Z}_N = 0$; $\underline{Y}_N = \infty$), то смещение нейтрали равно нулю при любой нагрузке.

7.4. Расчет симметричных трехфазных цепей

Трехфазная цепь называется симметричной, если у нее комплексы сопротивлений (и проводимостей) всех фаз одинаковы:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z} \text{ и } \underline{Y}_A = \underline{Y}_B = \underline{Y}_C = \underline{Y}.$$

Систему фазных напряжений генератора считаем всегда симметричной:

$$\underline{U}_{A0} = U_{\Phi\Gamma} = \frac{U_{\text{ЛГ}}}{\sqrt{3}}.$$

Линейное напряжение генератора $U_{\text{ЛГ}} = U$.

Фазное напряжение генератора $U_{\Phi\Gamma} = \frac{U}{\sqrt{3}}.$

Тогда:

$$\underline{U}_{A0} = \frac{U}{\sqrt{3}}; \underline{U}_{B0} = \frac{U}{\sqrt{3}}a^2; \underline{U}_{C0} = \frac{U}{\sqrt{3}}a. \quad (7.13)$$

Рассмотрим в этом случае напряжение смещения нейтрали:

$$\underline{U}_{O'0} = \frac{\underline{Y}(\underline{U}_{A0} + \underline{U}_{B0} + \underline{U}_{C0})}{3\underline{Y} + \underline{Y}_N} = \frac{\underline{Y} \frac{U}{\sqrt{3}} (1 + a^2 + a)}{3\underline{Y} + \underline{Y}_N} = 0.$$

В симметричной трехфазной цепи отсутствует смещение нейтрали и напряжения на фазах нагрузки одинаковы по величине и сдвинуты по фазе на 120° :

$$\underline{U}_{A0'} = \underline{U}_{A0} = \frac{U}{\sqrt{3}}; \underline{U}_{B0'} = \underline{U}_{B0} = \frac{U}{\sqrt{3}}a^2; \underline{U}_{C0'} = \underline{U}_{C0} = \frac{U}{\sqrt{3}}a. \quad (7.13a)$$

Токи в фазах также равны по величине и образуют симметричную трехфазную систему:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{A0'} \underline{Y} = \frac{U}{\sqrt{3}} \underline{Y}; \underline{I}_B = \underline{I}_A a^2; \underline{I}_C = \underline{I}_A a. \quad (7.14)$$

Таким образом, в симметричной трехфазной цепи все три фазы находятся в одинаковых условиях и достаточно произвести расчет для одной фазы и обобщить полученные результаты на остальные фазы.

Если в симметричной трехфазной цепи нагрузка соединена «треугольником» при наличии сопротивлений в проводах линии, то этот «треугольник» преобразуется в эквивалентную ему «звезду», а затем производится расчет так же, как было рассмотрено выше.

Примеры расчета как симметричных, так и несимметричных трехфазных цепей приведены ниже и рассматриваются на практических занятиях.

7.5. Мгновенная и средняя мощность симметричной трехфазной цепи

Мгновенная мощность трехфазной цепи равна сумме мгновенных мощностей фаз:

$$p = p_A + p_B + p_C = u_{A0'} i_A + u_{B0'} i_B + u_{C0'} i_C. \quad (7.15)$$

В симметричной трехфазной цепи можно записать:

$$\begin{aligned} u_{A0'} &= u_{A0} = U_{\phi m} \sin \omega t; \\ u_{B0'} &= u_{B0} = U_{\phi m} \sin(\omega t - 120^\circ); \\ u_{C0'} &= u_{C0} = U_{\phi m} \sin(\omega t - 240^\circ). \end{aligned} \quad (7.16)$$

В каждой фазе угол сдвига фаз между током и напряжением один и тот же:

$$\begin{aligned} i_A &= I_{\hat{0}m} \sin(\omega t - \varphi); \\ i_B &= I_{\hat{0}m} \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi); \\ i_C &= I_{\hat{0}m} \sin(\omega t - 240^\circ - \varphi). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Подставим (7.16) и (7.17) в (7.15) и учтем известное из математики соотношение:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Выражение (7.15) примет такой вид:

$$\begin{aligned}
 p &= U_{\Phi m} I_{\Phi m} [\sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) + \sin(\omega t - 120^\circ) \cdot \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi) + \\
 &+ \sin(\omega t - 240^\circ) \cdot \sin(\omega t - 240^\circ - \varphi)] = \frac{U_{\Phi m} I_{\Phi m}}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi) + \\
 &+ \cos \varphi - \cos(2\omega t - 240^\circ - \varphi) + \cos \varphi - \cos(2\omega t - 480^\circ - \varphi)] = \\
 &= 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi = P
 \end{aligned} \quad (7.18)$$

При выводе (7.18) учтено, что сумма трех подчеркнутых слагаемых, равна нулю, т.к. они образуют симметричную трехфазную систему.

Действующие значения фазных напряжений и токов выражены через амплитуды:

$$U_{\hat{\Phi}} = \frac{U_{\hat{\Phi m}}}{\sqrt{2}}; I_{\hat{\Phi}} = \frac{I_{\hat{\Phi m}}}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, мгновенная мощность симметричной трехфазной цепи не зависит от времени и равна активной мощности системы. Системы, в которых отсутствуют колебания мощности, называются уравновешенными. Такой режим работы наиболее благоприятен для трехфазных генераторов.

Поскольку в схеме «звезды» $I_{\text{Л}} = I_{\Phi}$, а $U_{\text{Л}} = U_{\Phi} \sqrt{3}$, а в схеме «треугольника» $U_{\text{Л}} = U_{\Phi}$, а $I_{\text{Л}} = I_{\Phi} \sqrt{3}$, то выражение активной мощности симметричной трехфазной цепи можно записать иначе:

$$P = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi. \quad (7.19)$$

Реактивная мощность симметричной трехфазной цепи определяется подобным образом:

$$Q = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \sin \varphi = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi. \quad (7.20)$$

Полная мощность симметричной трехфазной цепи:

$$S = 3U_{\Phi} I_{\Phi} = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}}. \quad (7.21)$$

Если трехфазная цепь несимметрична, то ее мгновенная мощность зависит от времени, а активная мощность вычисляется как сумма активных мощностей всех фаз:

$$P = P_A + P_B + P_C. \quad (7.22)$$

7.6. Примеры расчета трехфазных цепей

Пример 1 (рис. 7.9)

Заданы величины: U - линейное напряжение симметричного генератора, сопротивление проводов линии $\underline{Z}_{\text{л}}$ и сопротивление фаз нагрузки $\underline{Z}_{\text{н}}$. Нагрузка соединена звездой. Нужно рассчитать цепь, т.е. найти в ней токи, напряжения, активные мощности. Построить векторную диаграмму цепи.

Расчет проведем для фазы А.

Полное сопротивление фазы:

$$\underline{Z}_{\text{о}} = \underline{Z}_{\text{л}} + \underline{Z}_{\text{н}} = (R_{\text{л}} + R_{\text{н}}) + j(X_{\text{л}} + X_{\text{н}}) = z_{\text{о}} e^{j\varphi_{\text{о}}},$$

где $z_{\text{о}} = \sqrt{(R_{\text{л}} + R_{\text{н}})^2 + (X_{\text{л}} + X_{\text{н}})^2}$; $\varphi_{\text{о}} = \arctg \frac{X_{\text{л}} + X_{\text{н}}}{R_{\text{л}} + R_{\text{н}}}$.

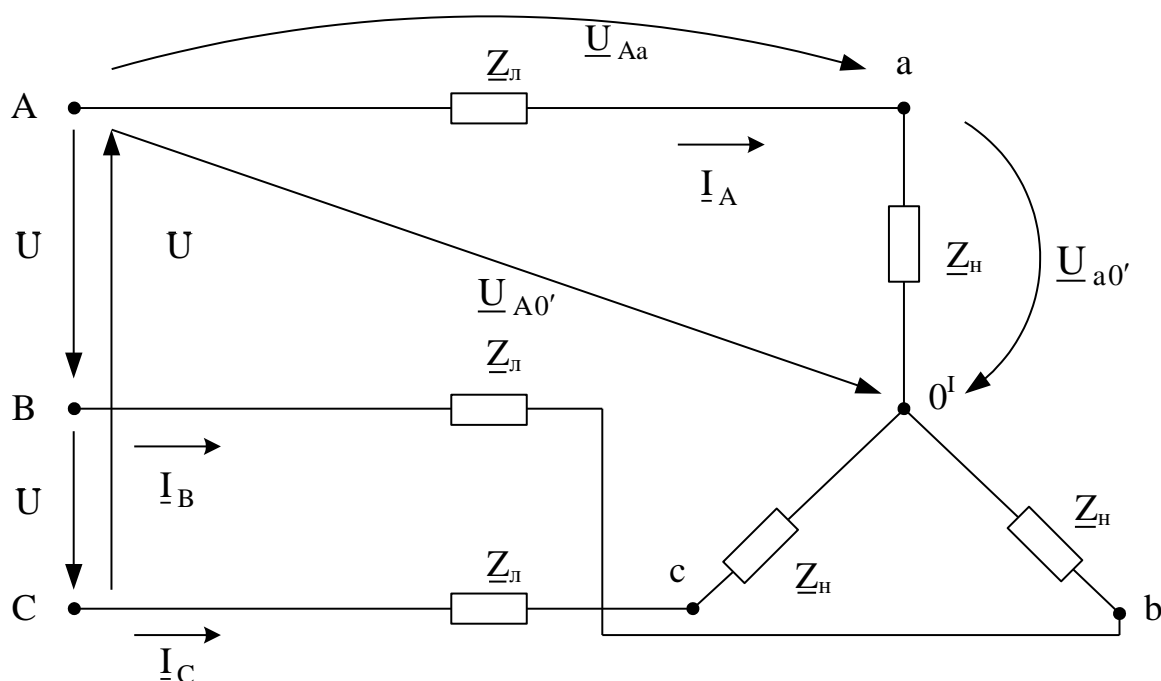


Рисунок 7.9

В симметричной цепи смещение нейтрали отсутствует, поэтому

$$\underline{U}_{A0'} = \underline{U}_{A0} = U_{\Phi\Gamma} = \frac{U}{\sqrt{3}}.$$

Ток фазы А: $\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{A0'}}{\underline{Z}_{\hat{O}}} = \frac{U}{\sqrt{3}z_{\hat{O}}} e^{-j\varphi_{\hat{O}}}.$

Фазное напряжение на нагрузке

$$\underline{U}_{a0'} = \underline{I}_A \underline{Z}_H = \frac{U z_H}{\sqrt{3} z_{\hat{O}}} e^{j(\varphi_I - \varphi_{\hat{O}})};$$

$$z_H = \sqrt{R_H^2 + X_H^2}; \quad \varphi_I = \arctg \frac{X_H}{R_H}.$$

Падение напряжения в проводе линии

$$\underline{U}_{Aa} = \underline{I}_A \underline{Z}_{\hat{E}} = \frac{U z_{\hat{E}}}{\sqrt{3} z_{\hat{O}}} e^{j(\varphi_{\hat{E}} - \varphi_{\hat{O}})}, \text{ где}$$

$$z_{\hat{E}} = \sqrt{R_{\hat{E}}^2 + X_{\hat{E}}^2}; \quad \varphi_{\hat{E}} = \arctg \frac{X_{\hat{E}}}{R_{\hat{E}}}.$$

Поскольку трехфазная цепь симметрична, то все фазы находятся в одинаковых условиях.

$I_L = I_A = I_B = I_C$; $U_{a0'} = U_{b0'} = U_{c0'} = U_{\Phi\Gamma}$; $U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = U_{\text{ЛН}} = U_{\Phi\Gamma} \sqrt{3}$ - линейное напряжение на нагрузке. Одинаковы также падения напряжения во всех проводах линии:

$$U_{Aa} = U_{Bb} = U_{Cc}.$$

Следует обратить внимание, что равны между собой не комплексы, а модули соответствующих величин. Фазы их комплексов отличаются на 120° и 240° .

Активная мощность нагрузки:

$$P_H = 3U_{\Phi\Gamma} I_{\Phi} \cos \varphi_H = \sqrt{3} U_{\text{ЛН}} I_L \cos \varphi_H = 3R_H I_L^2.$$

Активная мощность всей цепи:

$$P = 3U_{\Phi\Gamma} I_{\Phi} \cos \varphi_{\Phi} = \sqrt{3} U I_L \cos \varphi_{\Phi} = 3(R_L + R_H) I_L^2 = 3R_L I_L^2 + P_H.$$

Векторная диаграмма цепи изображена на рис. 7.10.

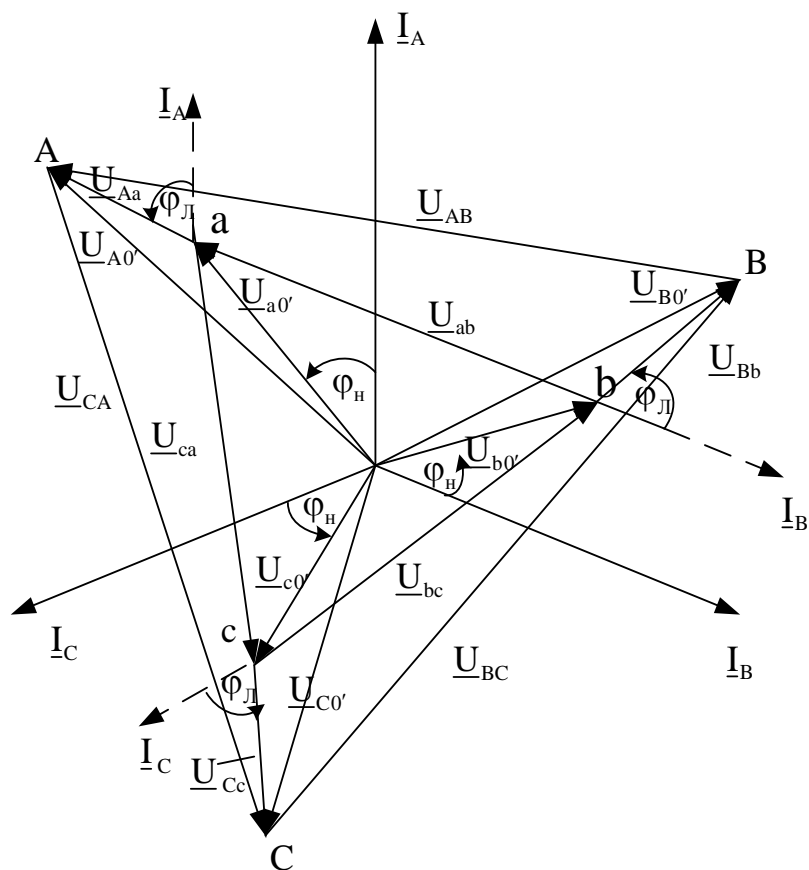


Рисунок 7.10

Порядок построения диаграммы :

$$\begin{aligned} \underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C \rightarrow \underline{U}_{a0'}, \underline{U}_{b0'}, \underline{U}_{c0'} (\varphi_H) \rightarrow \underline{U}_{Aa}, \underline{U}_{Bb}, \underline{U}_{Cc} (\varphi_E) \rightarrow \underline{U}_{A0'}, \underline{U}_{B0'}, \underline{U}_{C0'} \rightarrow \\ \rightarrow \underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca} \rightarrow \underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA} . \end{aligned}$$

Углы $\varphi_H > 0$, $\varphi_L > 0$ взяты произвольно.

Пример 2 (рис. 7.11)

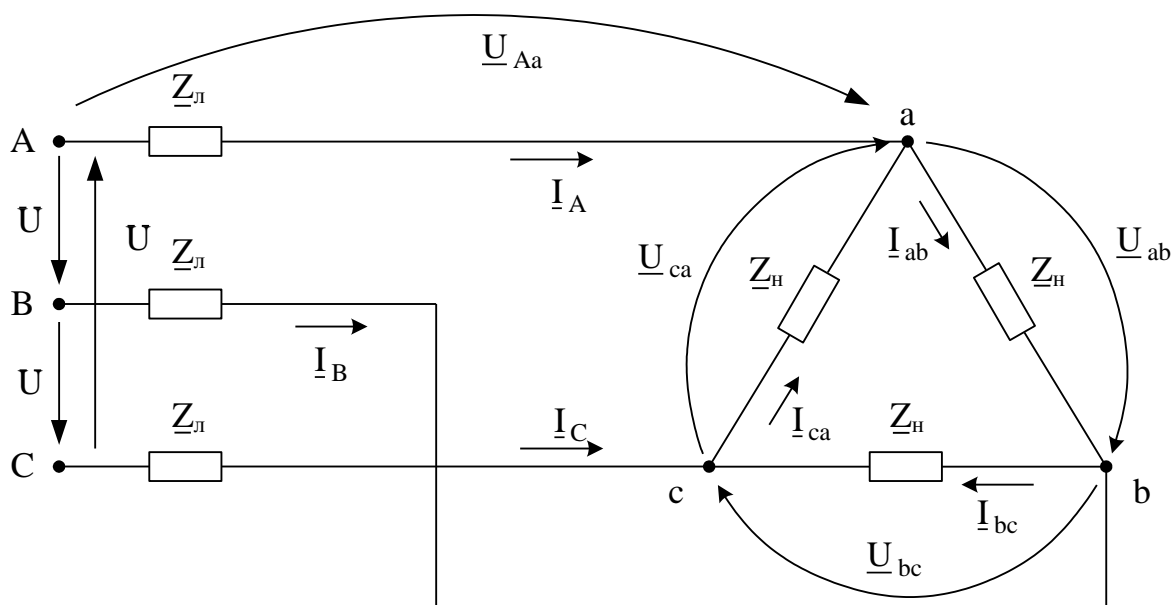


Рисунок 7.11

Дано $U = U_{\text{ЛГ}}$, $\underline{Z}_{\text{л}}$, $\underline{Z}_{\text{н}}$. Нагрузка соединена «треугольником». Нужно рассчитать цепь и построить ее векторную диаграмму.

Преобразуем «треугольник» в эквивалентную ему «звезду» и сведем эту задачу к предыдущей (рис. 7.12).

$$\underline{Z}'_{\text{н}} = \frac{\underline{Z}_{\text{н}}^2}{3\underline{Z}_{\text{л}}} = \frac{\underline{Z}_{\text{н}}}{3}; \quad \underline{Z}_{\text{О}} = \underline{Z}_{\text{л}} + \underline{Z}'_{\text{н}} = z_{\text{О}} e^{j\varphi_{\text{О}}}; \quad \underline{U}_{\text{AO}'} = \underline{U}_{\text{AO}} = \underline{U}_{\text{ОА}} = \frac{U}{\sqrt{3}};$$

$$I_{\text{A}} = \frac{U}{\sqrt{3}z_{\text{О}}}.$$

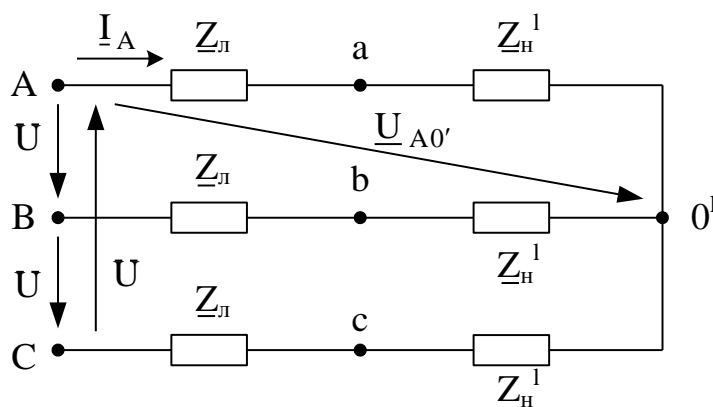


Рисунок 7.12

В исходной схеме ток I_A - линейный ток.

$$I_{\ddot{E}} = I_A = I_B = I_C = \frac{U}{\sqrt{3}z_{\ddot{O}}}$$

Фазные токи в нагрузке, соединенной «треугольником», находятся из соотношения (7.6a):

$$I_{\ddot{O}} = \frac{I_{\ddot{E}}}{\sqrt{3}} = \frac{U}{3z_{\ddot{O}}}.$$

Фазные токи $I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_{\Phi}$.

Фазные напряжения на нагрузке, соединенной «треугольником», одновременно являются линейными напряжениями в конце линии:

$$U_{\Phi H} = U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = I_{\Phi}Z_{\Phi} = U_{\Phi H}.$$

Падения напряжения в проводах линии

$$\Delta U_{\Phi} = U_{Aa} = U_{Bb} = U_{Cc} = I_{\Phi}Z_{\Phi}.$$

Мощность нагрузки:

$$P_H = 3U_{\Phi H}I_{\Phi} \cos \varphi_H = \sqrt{3}U_{\Phi H}I_{\Phi} \cos \varphi_H = 3R_{\Phi}I_{\Phi}^2.$$

Мощность всей цепи:

$$P = 3R_{\Phi}I_{\Phi}^2 + P_H = \sqrt{3}UI_{\Phi} \cos \varphi_{\Phi}.$$

Векторная диаграмма изображена на рис. 7.13

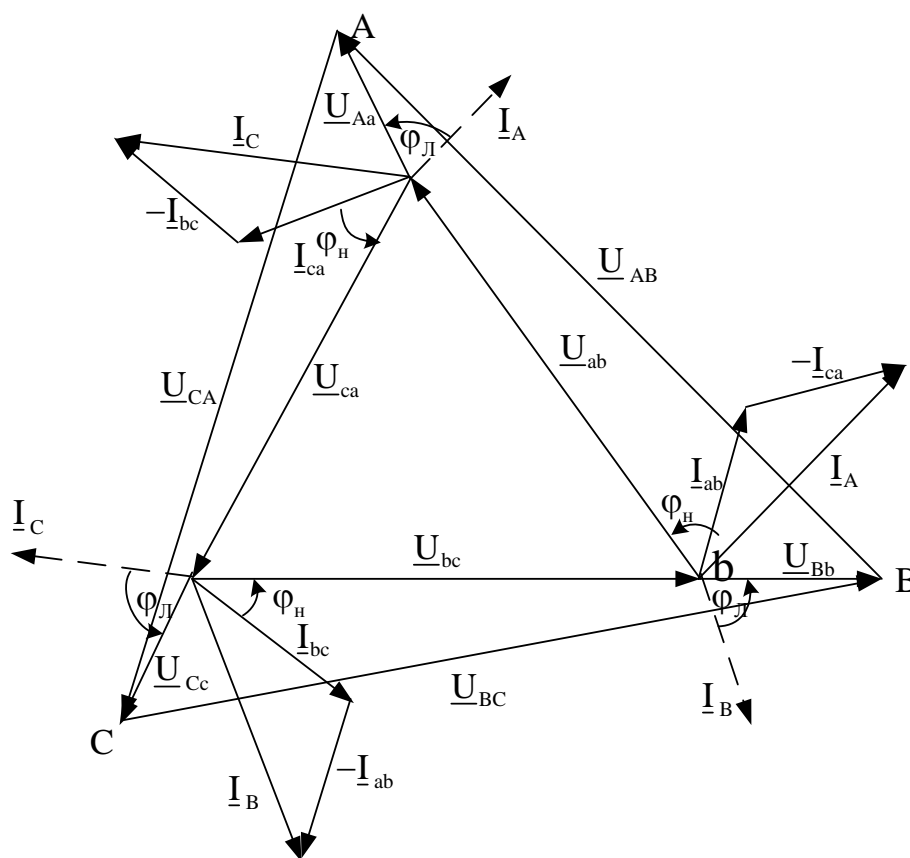


Рисунок 7.13

Порядок построения диаграммы:

$$\underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca} \rightarrow \underline{I}_{ab}, \underline{I}_{bc}, \underline{I}_{ca} (\varphi_H) \rightarrow \underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca},$$

$$\underline{I}_B, \underline{I}_C \rightarrow \underline{U}_{Aa}, \underline{U}_{Bb}, \underline{U}_{Cc} (\varphi_L) \rightarrow \underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}.$$

Пример 3

В заданной схеме (рис. 7.14) $R=X_C$. Генератор симметричен. Нужно определить, какая из ламп должна гореть ярче?

Хотя по условию $R = \frac{1}{\omega C}$, но комплексы сопротивлений фаз различны, и, следовательно, трехфазная цепь несимметрична. В ней возникает смещение нейтрали:

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\underline{U}_{A0}\underline{Y}_A + \underline{U}_{B0}\underline{Y}_B + \underline{U}_{C0}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}.$$

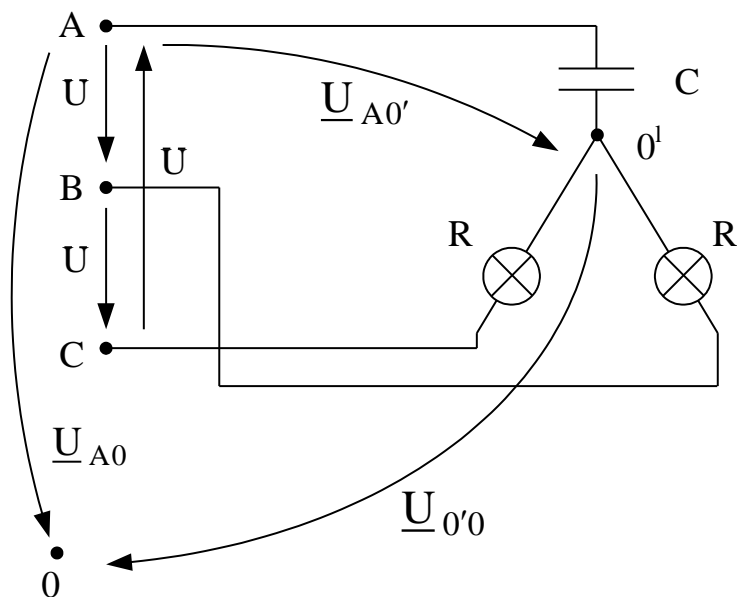


Рисунок 7.14

В данном случае

$$\underline{U}_{A0} = \frac{U}{\sqrt{3}}; \quad \underline{U}_{B0} = \frac{U}{\sqrt{3}}a^2; \quad \underline{U}_{C0} = \frac{U}{\sqrt{3}}a;$$

$$Y_A = j\omega C = j\frac{1}{R}; \quad Y_B = Y_C = \frac{1}{R}; \quad Y_N = 0.$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{0'0} &= \frac{\frac{U}{\sqrt{3}} \frac{1}{R} (j + a^2 + a)}{\frac{1}{R} (j + 1 + 1)} = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot \frac{j-1}{j+2} = \frac{U}{\sqrt{3}} \frac{(j-1)(2-j)}{(2+j)(2-j)} = \\ &= \frac{U}{\sqrt{3}} \frac{j2 - 2 + 1 + j}{5} = \frac{U}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{5} + j\frac{3}{5} \right). \end{aligned}$$

Дальнейший анализ проведем с помощью векторной диаграммы (рис.7.15). На ней положительная вещественная ось направлена по напряжению \underline{U}_{A0} .

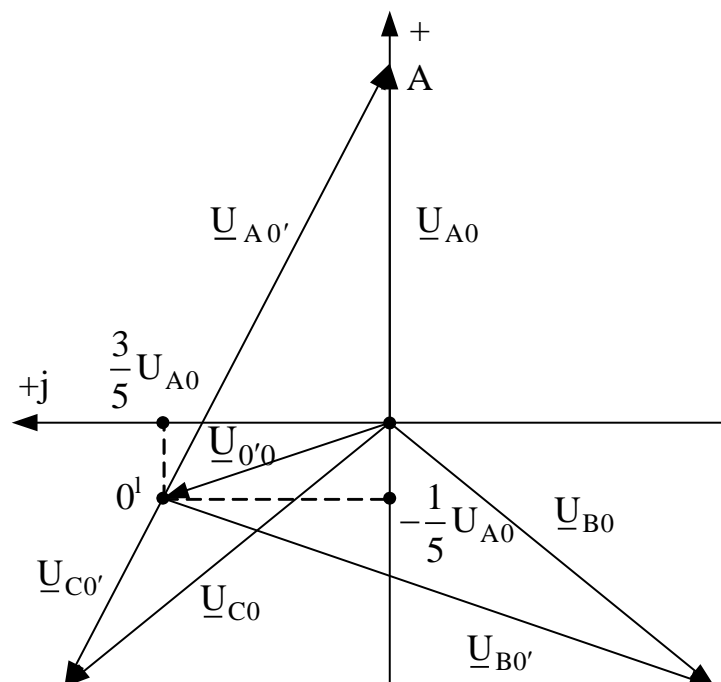


Рисунок 7.15

Из диаграммы очевидно, что $U_{B0'} > U_{C0'}$. Следовательно, ярче должна гореть лампа в фазе В.

Эту схему можно использовать для определения порядка чередования фаз.

Пример 4 (рис. 7.16)

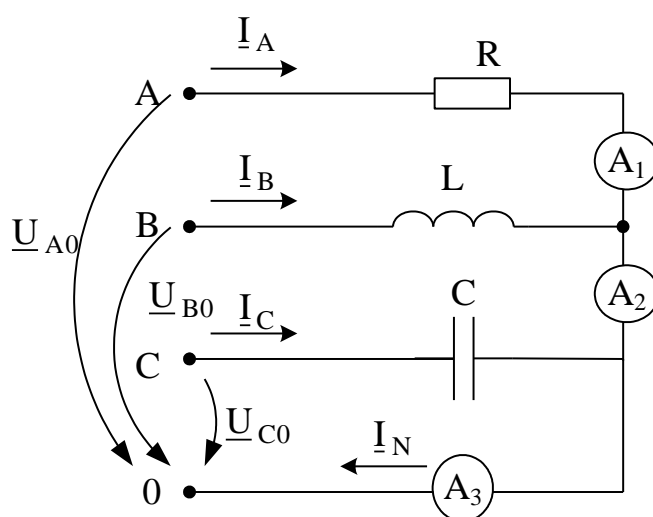


Рисунок 7.16

Генератор симметричен, $U_{фг}$ известно.

$$R = \omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Найти показания амперметров.

Эта трехфазная цепь несимметрична, но нейтральный провод не имеет сопротивления: $\underline{Z}_N = 0$; $\underline{Y}_N = \infty$. Поэтому напряжение смещения нейтрали равно нулю:

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{U_{\Phi\Gamma}(\underline{Y}_A + a^2 \underline{Y}_B + a \underline{Y}_C)}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = 0.$$

Следовательно, $\underline{U}_{A0'} = \underline{U}_{A0} = U_{\Phi\Gamma}$; $\underline{U}_{B0'} = \underline{U}_{B0} = U_{\Phi\Gamma} a^2$; $\underline{U}_{C0'} = \underline{U}_{C0} = U_{\Phi\Gamma} a$.
Определяем токи:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{A0'}}{R} = \frac{U_{\Phi\Gamma}}{R}; \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{B0'}}{j\omega L} = \frac{U_{\Phi\Gamma} e^{j240^\circ}}{R e^{j90^\circ}} = \frac{U_{\Phi\Gamma}}{R} e^{j150^\circ};$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{C0'}}{-j \frac{1}{\omega C}} = \frac{U_{\Phi\Gamma} e^{j120^\circ}}{R e^{-j90^\circ}} = \frac{U_{\Phi\Gamma}}{R} e^{j210^\circ}.$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C &= \frac{U_{\Phi\Gamma}}{R} (1 + e^{j150^\circ} + e^{j210^\circ}) = \frac{U_{\Phi\Gamma}}{R} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{U_{\Phi\Gamma}}{R} (1 - \sqrt{3}) = -0,732 \frac{U_{\Phi\Gamma}}{R}. \end{aligned}$$

Первый амперметр измеряет ток фазы А: $I_{A_1} = \frac{U_{\hat{O}\hat{A}}}{R}$.

Второй амперметр измеряет сумму токов фаз А и В:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{A_2} &= \frac{U_{\hat{O}\hat{A}}}{R} (1 + e^{j150^\circ}) = \frac{U_{\hat{O}\hat{A}}}{R} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) = \frac{U_{\hat{O}\hat{A}}}{R} (0,134 + j0,5) = 0,518 \frac{U_{\hat{O}\hat{A}}}{R} e^{j75^\circ} \\ I_{A_2} &= 0,518 \frac{U_{\hat{O}\hat{A}}}{R}. \end{aligned}$$

Третий амперметр измеряет ток в нейтральном проводе:

$$I_{A_3} = 0,732 \frac{U_{\hat{O}\hat{A}}}{R}.$$

Векторная диаграмма этой цепи представлена на рис. 7.17.

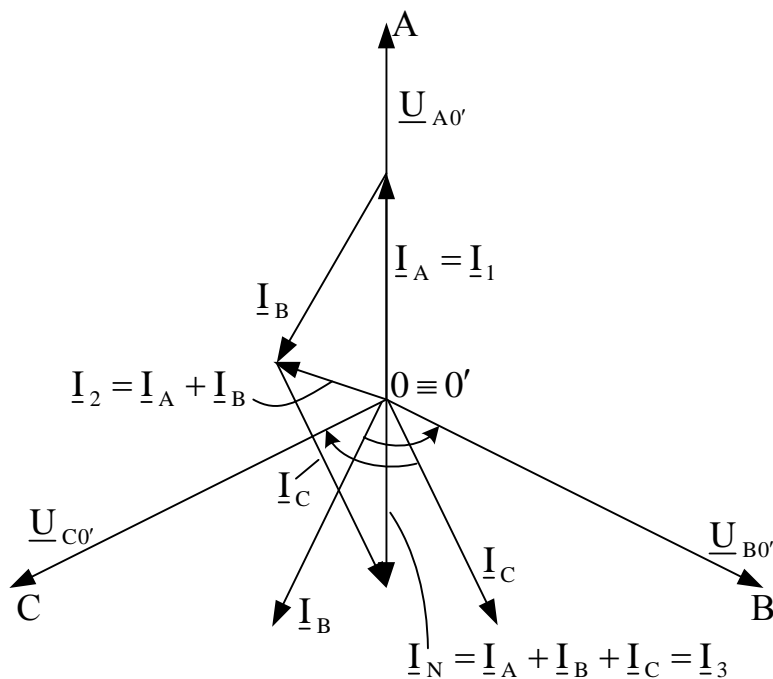


Рисунок 7.17

Пример 5 (рис.7.18)

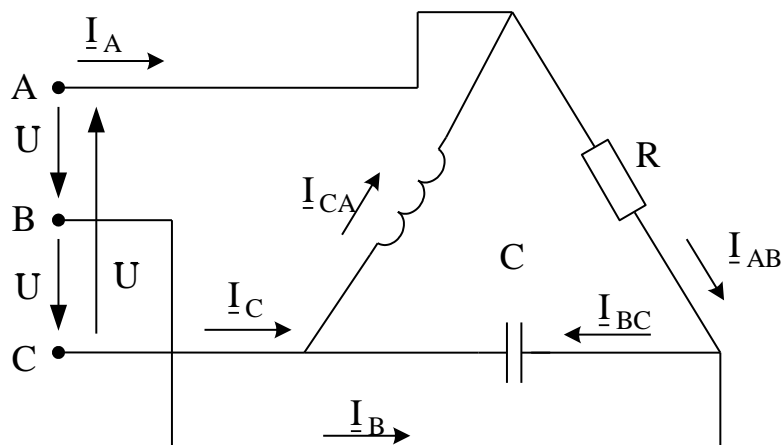


Рисунок 7.18

Дано: U , $R = \omega L = \frac{1}{\omega C}$. Найти токи.

Поскольку провода линии не имеют сопротивлений, то линейные напряжения генератора являются фазными для несимметричной нагрузки, соединенной «треугольником». Поэтому «треугольник» преобразовывать в «звезду» нерационально. В данном случае можно сначала найти фазные токи, а затем – линейные с помощью первого

закона Кирхгофа. На рис. 7.19 изображена векторная диаграмма, иллюстрирующая решение.

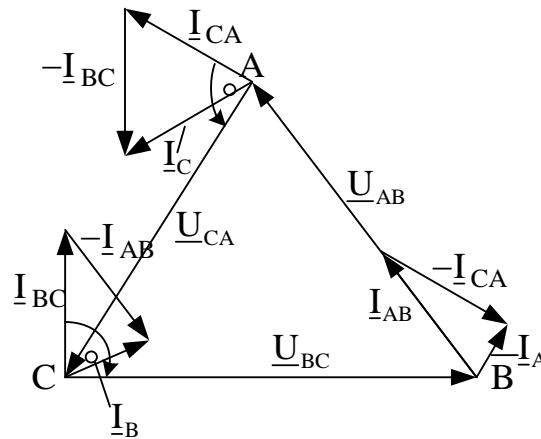


Рисунок 7.19

Пусть $\underline{U}_{AB} = U$, тогда $\underline{U}_{BC} = Ua^2$; $\underline{U}_{CA} = Ua$.

$$\underline{I}_{AB} = \frac{U}{R}; \underline{I}_{BC} = \frac{Ua^2}{Re^{-j90^\circ}} = \frac{U}{R}e^{j330^\circ}; \underline{I}_{CA} = \frac{Ua}{Re^{j90^\circ}} = \frac{U}{R}e^{j30^\circ};$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = \frac{U}{R}(1 - e^{j30^\circ}) = \frac{U}{R}(0,134 - j0,5) = 0,518 \frac{U}{R}e^{-j75^\circ};$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_B &= \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = \frac{U}{R}(e^{j330^\circ} - 1) = \frac{U}{R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} - 1\right) = \\ &= \frac{U}{R}(-0,134 - j0,5) = 0,518 \frac{U}{R}e^{-j105^\circ}; \end{aligned}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = \frac{U}{R}(e^{j30^\circ} - e^{j330^\circ}) = \frac{U}{R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = j\frac{U}{R} = \frac{U}{R}e^{j90^\circ}.$$

7.7. Крайние случаи несимметрии трехфазных цепей

Рассмотрим сначала для сравнения симметричный режим в простейшей цепи (рис. 7.20).

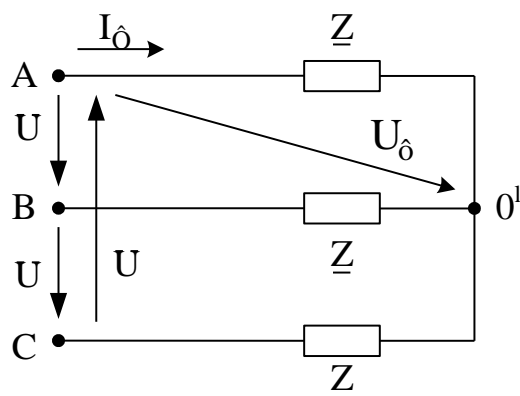


Рисунок 7.20

$$U_0 = \frac{U_{\text{ф}}}{\sqrt{3}} = \frac{U}{\sqrt{3}}; I_0 = \frac{U_0}{z}.$$

$$P = 3U_{\text{ф}}I_{\text{ф}}\cos\varphi.$$

1. Обрыв фазы в симметричной цепи (рис. 7.21)

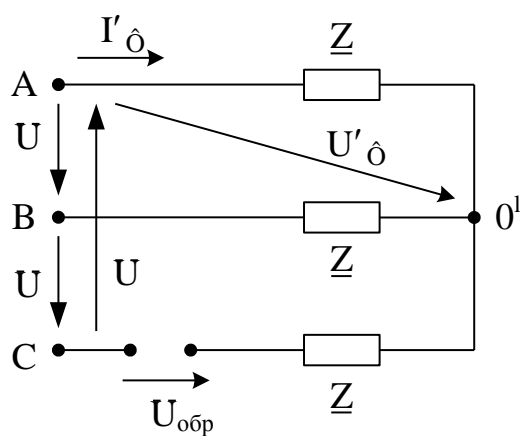


Рисунок 7.21

Пусть произошел обрыв фазы C: $Z_C = \infty$; $Y_C = 0$.

Определим смещение нейтрали и дальнейшие рассуждения проведем по векторной диаграмме (рис. 7.22).

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\underline{U}_{A0}\underline{Y} + \underline{U}_{B0}\underline{Y} + \underline{U}_{C0}0}{\underline{Y} + \underline{Y} + 0} = \frac{\underline{U}_{A0} + \underline{U}_{B0}}{2}. \quad (7.23)$$

Нейтраль $0'$ лежит на середине линейного напряжения \underline{U}_{AB} (рис. 7.22).

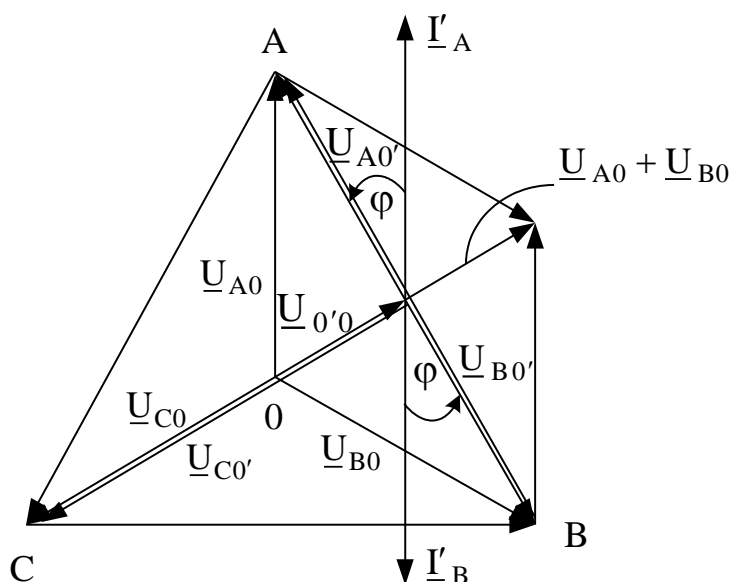


Рисунок 7.22

Напряжения на «здоровых» фазах:

$$U_{A0'} = U_{B0'} = U'_{\Phi} = \frac{U}{2} = U_{\Phi} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Токи в этих фазах: $I'_A = I'_B = I'_{\Phi} = I_{\Phi} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Мощность цепи после обрыва:

$$P' = 2U'_{\Phi}I'_{\Phi} \cos \varphi = 2 \frac{3}{4} U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi = \frac{1}{2} P.$$

Таким образом, после обрыва одной фазы напряжения и токи в «здоровых» фазах изменяются в $\frac{\sqrt{3}}{2}$ раз, а мощность цепи уменьшается в 2 раза.

Напряжение на оборванной фазе, как видно из диаграммы, увеличивается в 1,5 раза:

$$U_{\text{обр}} = U_{C0'} = 1,5U_{\Phi}.$$

2. Короткое замыкание фазы в симметричной цепи (рис. 7.23)

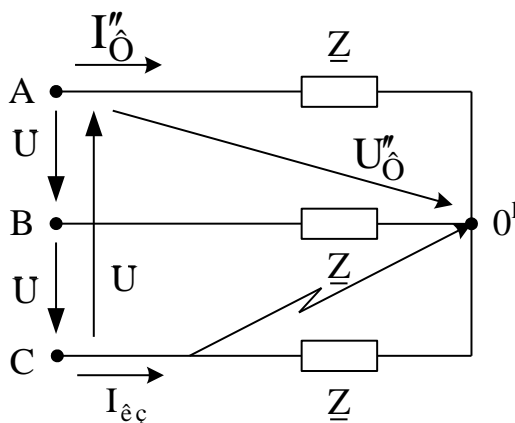


Рисунок 7.23

При коротком замыкании фазы C $\underline{Z}_C = 0$; $\underline{Y}_C = \infty$; $\underline{Y}_A = \underline{Y}_B = \underline{Y}$.

Найдем смещение нейтрали:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{0'0} &= \lim_{Y_C \rightarrow \infty} \frac{\underline{U}_{A0}\underline{Y} + \underline{U}_{B0}\underline{Y} + \underline{U}_{C0}\underline{Y}_C}{2\underline{Y} + \underline{Y}_C} = \\ &= \lim_{Y_C \rightarrow \infty} \frac{\underline{U}_{A0}\frac{\underline{Y}}{\underline{Y}_C} + \underline{U}_{B0}\frac{\underline{Y}}{\underline{Y}_C} + \underline{U}_{C0}}{2\frac{\underline{Y}}{\underline{Y}_C} + 1} = \underline{U}_{C0}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Таким образом, при коротком замыкании фазы C нейтраль смещается в точку C (рис. 7.24).

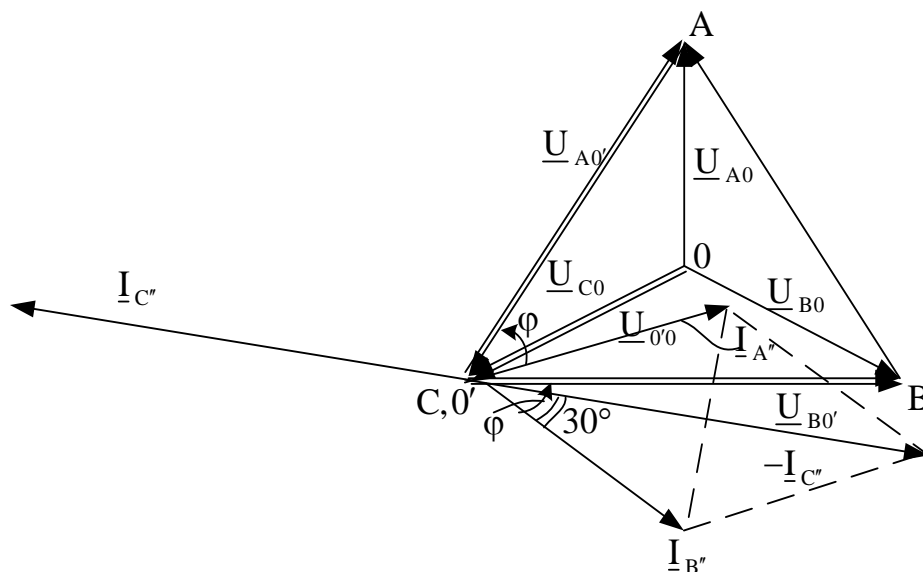


Рисунок 7.24

Как видно из диаграммы, фазные напряжения на «здоровых» фазах увеличиваются до линейных напряжений:

$$U_{A0'} = U_{B0'} = U_{C0'} = U = U_{\phi} \sqrt{3}.$$

Следовательно, во столько же раз изменятся токи в этих фазах:

$$I_{A''} = I_{B''} = I_{\phi} \sqrt{3}.$$

Мощность этой цепи:

$$P'' = 2U_{\phi} \sqrt{3} I_{\phi} \sqrt{3} \cos \varphi = 6U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi = 2P.$$

Таким образом, при коротком замыкании напряжения и токи в «здоровых» фазах увеличиваются в $\sqrt{3}$ раз, а мощность цепи увеличивается в два раза.

Ток в короткозамкнутой фазе найдем из векторной диаграммы:

$$\frac{1}{2} I_{\text{кз}} = I_{\phi}'' \cos 30^{\circ} = I_{\phi} \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда } I_{\text{кз}} = 3I_{\phi}.$$

Ток в короткозамкнутой фазе увеличивается в три раза по сравнению с симметричным режимом.

7.8. Измерение активной мощности в трехфазных цепях

В несимметричной четырехпроводной цепи мощность измеряется тремя ваттметрами (рис. 7.25):

$$P = P_A + P_B + P_C = P_{w1} + P_{w2} + P_{w3}$$

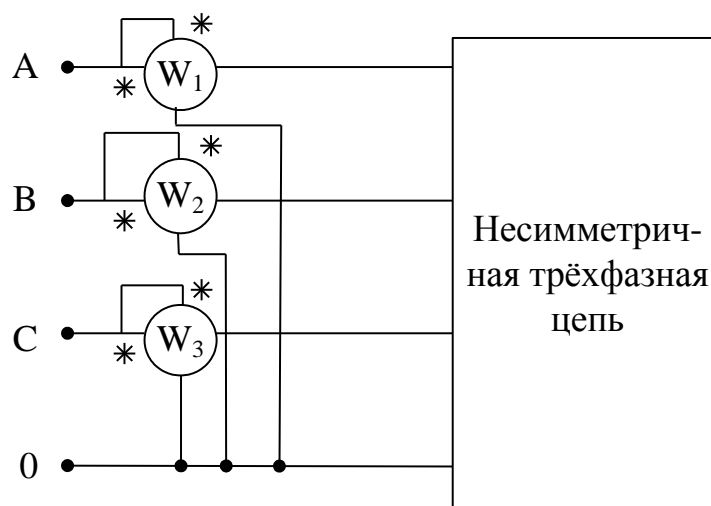


Рисунок 7.25

Если цепь симметричная, то достаточно измерить мощность в одной фазе и умножить ее на 3 (рис. 7.26, а и б).

$$P = 3P_{\Phi} = 3P_w.$$

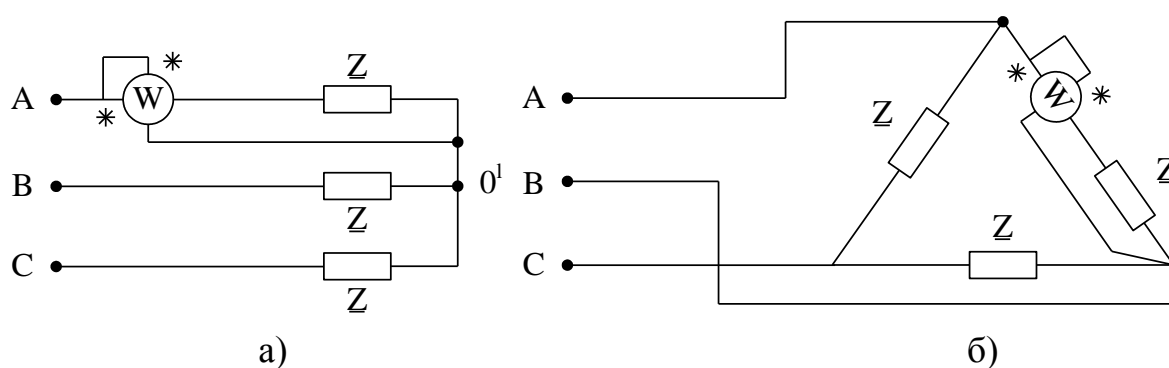


Рисунок 7.26

Как в симметричной, так и в несимметричной трехфазной цепи без нейтрального провода мощность можно измерить с помощью двух

ваттметров, включенных по специальной схеме. Токовые обмотки включаются в любые две фазы, а обмотки напряжения включаются на линейные напряжения между той фазой, где включена токовая обмотка, и третьей фазой. Эта схема называется схемой двух ваттметров (рис. 7.27).

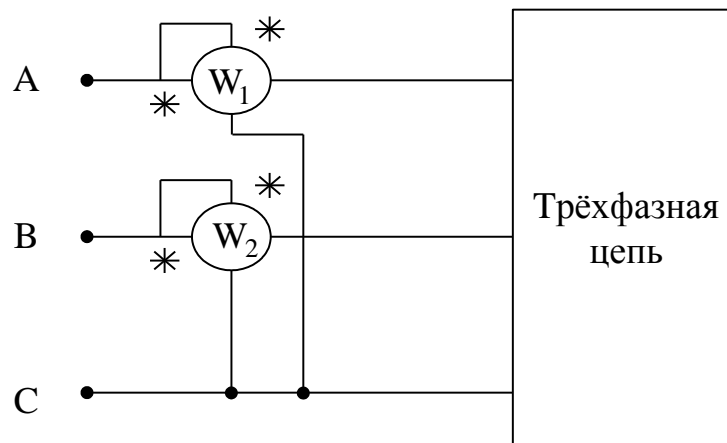


Рисунок 7.27

Докажем, что эти два ваттметра измеряют мощность всех трех фаз.

$$\begin{aligned}
 P &= P_A + P_B + P_C = \left[\underline{U}_{A0'}^* \underline{I}_A + \underline{U}_{B0'}^* \underline{I}_B + \underline{U}_{C0'}^* \underline{I}_C \right]_{\text{re}} = \\
 &= \left[\underline{U}_{A0'}^* \underline{I}_A + \underline{U}_{B0'}^* \underline{I}_B + \underline{U}_{C0'}^* \left(-\underline{I}_A - \underline{I}_B \right) \right]_{\text{re}} = \\
 &= \left[\left(\underline{U}_{A0'} - \underline{U}_{C0'} \right)^* \underline{I}_A + \left(\underline{U}_{B0'} - \underline{U}_{C0'} \right)^* \underline{I}_B \right]_{\text{re}} = \\
 &= \left[\underline{U}_{AC}^* \underline{I}_A \right]_{\text{re}} + \left[\underline{U}_{BC}^* \underline{I}_B \right]_{\text{re}} = P_{w_1} + P_{w_2}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим показания этих ваттметров при симметричной нагрузке с помощью векторной диаграммы (рис. 7.28).

Из диаграммы можно сделать вывод, что показания двух ваттметров таковы:

$$P_{w_1} = U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos(\varphi - 30^\circ); P_{w_2} = U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos(\varphi + 30^\circ).$$

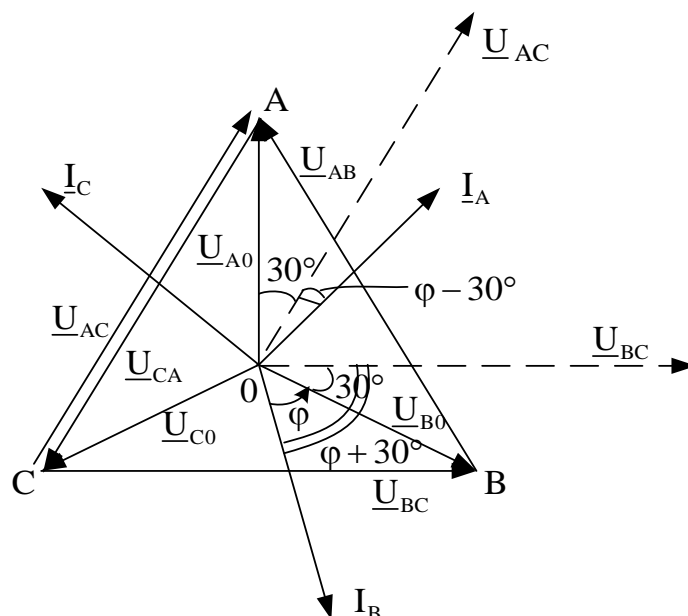


Рисунок 7.28

По показаниям двух ваттметров можно определить угол сдвига фаз:

- 1) $P_1 = P_2$, если $\varphi = 0$;
- 2) $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, $P_1 > P_2$, если $\varphi < 60^\circ$;
- 3) $P_1 > 0$, $P_2 = 0$, если $\varphi = 60^\circ$;
- 4) $P_1 > 0$, $P_2 < 0$, если $\varphi > 60^\circ$;
- 5) Если $\varphi = 90^\circ$, то $P_1 > 0$, $P_2 < 0$, $P_2 = -P_1$; $P = 0$.

7.9. Образование вращающегося магнитного поля

Если на статоре электрической машины расположить одну обмотку и пропускать по ней постоянный ток, то можно считать, что индукция магнитного поля в зазоре меняется по косинусоидальному закону: $B = B_0 \cos \alpha$.

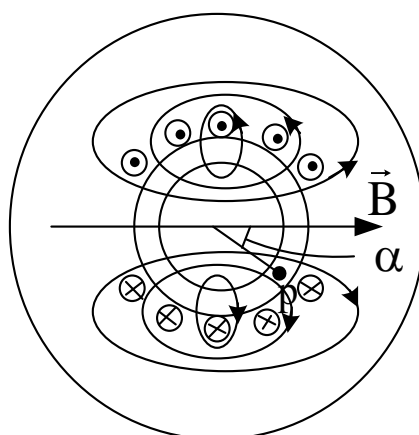


Рисунок 7.29

Угол α отсчитывается от оси обмотки, где индукция максимальна (рис. 7.29).

Если по этой обмотке пропускать синусоидальный ток, то максимальная индукция тоже будет синусоидальной функцией времени:

$$B_0 = B_m \sin \omega t, \quad (7.25)$$

а индукция в любой точке зазора будет меняться по закону:

$$B = B_m \sin \omega t \cdot \cos \alpha. \quad (7.26)$$

Это уравнение пульсирующего магнитного поля.

Теперь расположим на статоре 3 обмотки под углом 120° друг к другу (рис. 7.30), и будем питать их симметричной трехфазной системой токов. Найдем суммарную индукцию в любой точке зазора.

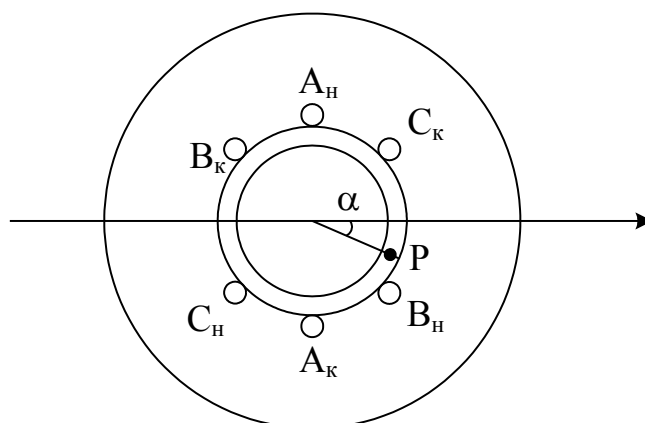


Рисунок 7.30

$$\begin{aligned} B &= B_m \sin \omega t \cdot \cos \alpha + B_m \sin(\omega t - 120^\circ) \cdot \cos(\alpha - 120^\circ) + \\ &+ B_m \sin(\omega t - 240^\circ) \cdot \cos(\alpha - 240^\circ) = B_m \frac{1}{2} \left[\sin(\omega t + \alpha) + \sin(\omega t - \alpha) + \right. \\ &+ \sin(\omega t + \alpha - 240^\circ) + \sin(\omega t - \alpha) + \sin(\omega t + \alpha - 480^\circ) + \sin(\omega t - \alpha) \left. \right] = \\ &= \frac{3}{2} B_m \sin(\omega t - \alpha). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Сумма трех синусоидальных функций, которые подчеркнуты, равна нулю, т. к. они образуют симметричную трехфазную систему величин.

Докажем, что мы получили уравнение вращающегося магнитного поля. Пусть некоторая точка Р в зазоре имеет координату α_0 .

$$\text{При } t = 0 \quad B_p = \frac{3}{2} B_m \sin(-\alpha_0) = B_{p0}.$$

Если при вращении точки Р в зазоре с угловой скоростью ω индукция будет оставаться неизменной, то это будет означать, что магнитное поле тоже вращается с той же угловой скоростью.

При вращении точки Р ее координата $\alpha = \omega t + \alpha_0$.

Индукция в этой точке в любой момент времени:

$$B_p = \frac{3}{2} B_m \sin(\omega t - \omega t - \alpha_0) = \frac{3}{2} B_m \sin(-\alpha_0) = B_{p0},$$

что и требовалось доказать.

Вращающееся магнитное поле используется для конструирования электродвигателей.

8. ТЕОРИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Четырехполусником (ЧП) называется любая схема, имеющая две пары зажимов (полюсов). Чаще всего к одной паре подключается источник ($1-1'$), и эти зажимы называются первичными или входными (вход), ко второй паре зажимов ($2-2'$) подключается приемник (нагрузка), но не во всех режимах это так. Вторичные зажимы часто называют выходными (выход).

Обозначение ЧП показано на рис. 8.1. Примеры ЧП из практики – линия, трансформатор, фильтр и др.

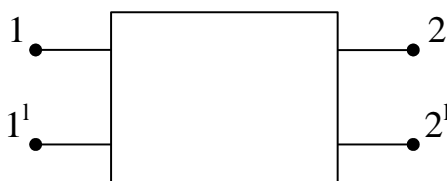


Рисунок 8.1

8.1. Классификация ЧП

1) Линейные и нелинейные ЧП

Если ЧП содержит хотя бы один нелинейный элемент, он называется нелинейным.

2) Активные и пассивные ЧП.

Если внутри ЧП есть некомпенсированные источники энергии, ЧП называют активным (рис. 8.2 а,б).

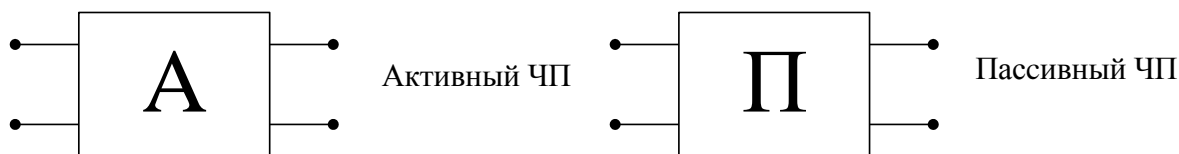


Рисунок 8.2

3) Обратимые и необратимые ЧП.

ЧП называют обратимым, если для него справедлив принцип взаимности.

Линейные пассивные ЧП всегда обратимы. Мы будем изучать только линейные пассивные обратимые четырехполусники.

Существуют и другие принципы классификации ЧП. Некоторые из них будут рассмотрены ниже.

8.2. Общепринятые условные положительные направления токов и напряжений ЧП в зависимости от режимов работы

1) Прямое питание: к первичным зажимам подключается источник, ко вторичным – приемник. Энергия передается от зажимов 1–1' к зажимам 2–2' (рис. 8.3 а).

2) Двухстороннее питание: два источника подключаются к зажимам 1–1' и 2–2' (рис. 8.3 б).

3). Обратное питание: источник подключается к зажимам 2–2', а приемник - к зажимам 1–1'. Передача энергии происходит от зажимов 2–2' к зажимам 1–1' (рис. 8.3 в).

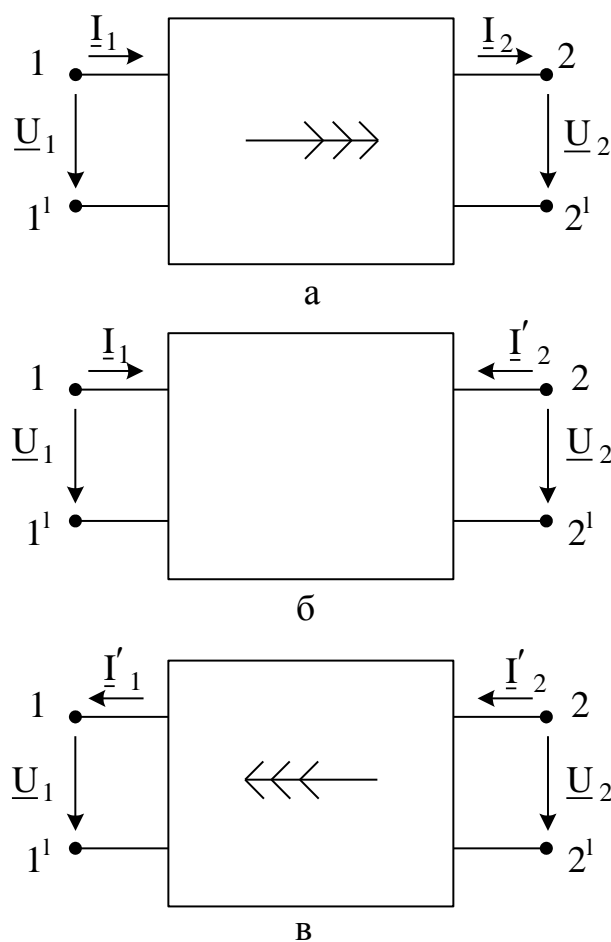


Рисунок 8.3

Между токами и напряжениями линейного пассивного ЧП существуют линейные соотношения, которые записываются в виде уравнений ЧП. Коэффициенты этих уравнений не зависят от токов и напряжений, а зависят от схемы ЧП и частоты. При фиксированной частоте эти коэффициенты постоянны для данного ЧП и называются его первичными параметрами.

8.3. Уравнения ЧП

1) Уравнения ЧП в Y -параметрах

Они записываются при двухстороннем питании ЧП (рис.8.4).

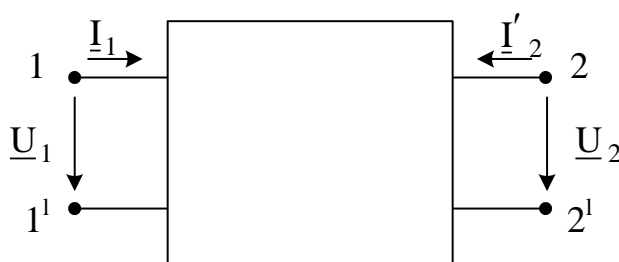


Рисунок 8.4

Согласно принципу наложения, каждый ток можно записать в виде суммы двух составляющих, пропорциональных напряжению источника, который эту составляющую обуславливает:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{1(1)} + \underline{I}_{1(2)} = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}'_2 &= \underline{I}_{2(1)} + \underline{I}_{2(2)} = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения в Y – параметрах имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}'_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2. \end{cases} \quad (8.1)$$

Все Y – параметры имеют размерность проводимости: $[Y] = \frac{1}{\text{Ом}} = \text{См}$.

Для обратимых ЧП $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$.

Выясним физический смысл Y – параметров ЧП, для чего рассмотрим режимы прямого и обратного короткого замыкания (к.з.)

а) Прямое короткое замыкание $\underline{U}_2 = 0$. Питание со стороны зажимов 1–1', зажимы 2–2' закорочены (рис. 8.5).



Рисунок 8.5

$$\begin{cases} \underline{I}_{1k} = \underline{Y}_{11} \underline{U}_{1k}; \\ \underline{I}'_{2k} = \underline{Y}_{21} \underline{U}_{1k}; \end{cases} \quad \underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_{1k}}{\underline{U}_{1k}} = \underline{Y}_{1k}.$$

Параметр \underline{Y}_{11} имеет смысл входной проводимости четырехполюсника в режиме прямого короткого замыкания.

$\underline{Y}_{21} = \frac{\underline{I}'_{2k}}{\underline{U}_{1k}}$ - передаточная проводимость ЧП со стороны зажимов 1-1' в режиме прямого к.з.

б) Обратное короткое замыкание $\underline{U}_1 = 0$. Питание со стороны 2-2' зажимы 1-1' закорочены (рис. 8.6).

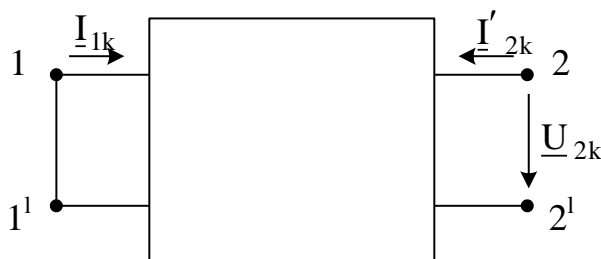


Рисунок 8.6

$$\begin{cases} \underline{I}_{1k} = \underline{Y}_{12} \underline{U}_{2k}; \\ \underline{I}'_{2k} = \underline{Y}_{22} \underline{U}_{2k}. \end{cases}$$

$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{I}_{1k}}{\underline{U}_{2k}}$ - передаточная проводимость в режиме обратного к.з.

$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{I}'_{2k}}{\underline{U}_{2k}} = \underline{Y}_{2k}$ - входная проводимость ЧП со стороны зажимов 2-2' в режиме обратного к.з.

$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ - согласно принципу взаимности.

2) Уравнения ЧП в Z – параметрах

Решим систему (8.1) относительно напряжений:

$$|Y| = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{vmatrix} = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21};$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \underline{I}_1 \underline{Y}_{12} \\ \underline{I}'_2 \underline{Y}_{22} \end{vmatrix}}{|Y|} = \frac{\underline{Y}_{22}}{|Y|} \underline{I}_1 + \frac{(-\underline{Y}_{12})}{|Y|} \underline{I}'_2 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}'_2;$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} \underline{I}_1 \\ \underline{Y}_{21} \underline{I}'_2 \end{vmatrix}}{|Y|} = \frac{(-\underline{Y}_{21})}{|Y|} \underline{I}_1 + \frac{\underline{Y}_{11}}{|Y|} \underline{I}'_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}'_2.$$

Поскольку $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$, то и $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$.

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}'_2; \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}'_2. \end{cases} \quad (8.2)$$

Все \underline{Z} -параметры имеют размерность сопротивления [Ом].

Для выяснения физического смысла \underline{Z} -параметров используем два режима холостого хода (х.х.) при прямом и обратном питании.

а) Рассмотрим режим прямого холостого хода: зажимы 2-2' разомкнуты, $\underline{I}_2 = 0$, питание со стороны зажимов 1-1' (рис.8.7).



Рисунок 8.7

$$\begin{cases} \underline{U}_{10} = \underline{Z}_{11} \underline{I}_{10}; \\ \underline{U}_{20} = \underline{Z}_{21} \underline{I}_{10}. \end{cases}$$

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} = \underline{Z}_{10} \text{ - входное сопротивление ЧП в режиме прямого х.х.}$$

относительно зажимов 1–1'.

$$\underline{Z}_{21} = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{I}_{10}} \text{ - передаточное сопротивление в режиме прямого х.х.}$$

б) Перейдем к режиму обратного холостого хода: зажимы 1–1' разомкнуты, $\underline{I}_1 = 0$, питание со стороны зажимов 2–2' (рис. 8.8).

$$\begin{cases} \underline{U}_{10} = \underline{Z}_{12} \underline{I}'_{20}; \\ \underline{U}_{20} = \underline{Z}_{22} \underline{I}'_{20}. \end{cases}$$

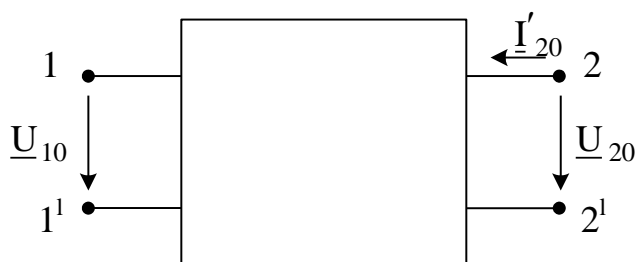


Рисунок 8.8

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}'_{20}} \text{ - передаточное сопротивление в режиме обратного х.х.}$$

$$\underline{Z}_{22} = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{I}'_{20}} = \underline{Z}_{20} \text{ - входное сопротивление ЧП относительно зажимов 2–}$$

2' в режиме обратного х.х.

3) Уравнения ЧП в \underline{A} -параметрах

Эти уравнения применяются при прямой передаче энергии (рис. 8.9).

Решим систему уравнений в \underline{Y} -параметрах (8.1) относительно \underline{U}_1 и \underline{I}_1 , учитывая, что $\underline{I}'_2 = -\underline{I}_2$,

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2. \quad (8.3)$$

$$-\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2 \quad (8.4)$$

Из уравнения (8.4)

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{I}_2 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2}{-\underline{Y}_{21}}. \quad (8.5)$$

Подставим (8.5) в (8.3):

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_{11}}{-\underline{Y}_{21}}(\underline{Y}_{22}\underline{U}_2 + \underline{I}_2) + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 = \underline{U}_2 \left(\underline{Y}_{12} - \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \right) + \left(\frac{\underline{Y}_{11}}{-\underline{Y}_{21}} \right) \underline{I}_2 \quad (8.6)$$

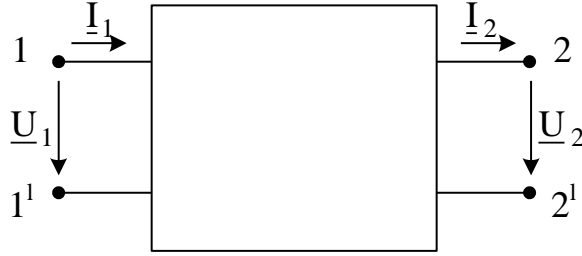


Рисунок 8.9

Обозначим в (8.5) и в (8.6): $-\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} = \underline{A}_{11}$; $-\frac{1}{\underline{Y}_{21}} = \underline{A}_{12}$;

$\underline{Y}_{12} - \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} = \underline{A}_{21}$; $-\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} = \underline{A}_{22}$. Получим уравнения в следующем виде:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2. \end{cases} \quad (8.7)$$

Найдем связь между \underline{A} -параметрами, для чего вычислим значение выражения:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} &= \left(-\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \right) \left(-\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} \right) - \left(-\frac{1}{\underline{Y}_{21}} \right) \left(\underline{Y}_{12} - \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \right) = \\ &= \frac{\underline{Y}_{22}\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}^2} + \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}} - \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}^2} = 1, \end{aligned}$$

т. к. $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$.

Итак,

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1. \quad (8.8)$$

Для выяснения физического смысла \underline{A} -параметров рассмотрим режимы холостого хода и короткого замыкания при прямом питании.

а) Прямой холостой ход: зажимы 2–2' разомкнуты, $\underline{I}_2 = 0$, питание со стороны зажимов 1–1' (рис. 8.10):

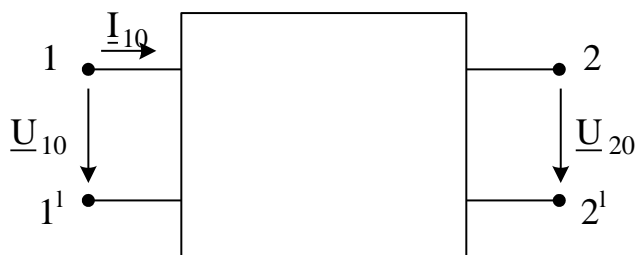


Рисунок 8.10

$$\begin{cases} \underline{U}_{10} = \underline{A}_{11} \underline{U}_{20}; \\ \underline{I}_{10} = \underline{A}_{21} \underline{U}_{20}. \end{cases}$$

$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{U}_{20}}$ - передаточный коэффициент по напряжению в режиме прямого х.х. (безразмерная величина);

$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_{10}}{\underline{U}_{20}}$ - передаточная проводимость при прямом х.х. (имеет размерность проводимости - См).

б) Прямое короткое замыкание: зажимы 2–2' замкнуты, $\underline{U}_2 = 0$, питание со стороны зажимов 1–1' (рис. 8.11).

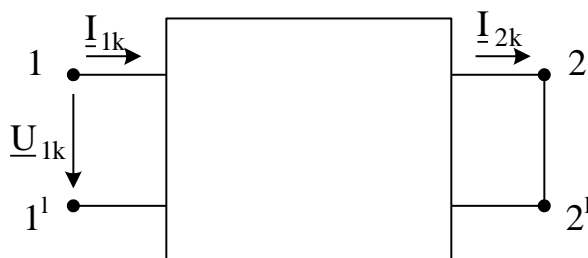


Рисунок 8.11

$$\begin{cases} \underline{U}_{1k} = \underline{A}_{12} \underline{I}_{2k}; \\ \underline{I}_{1k} = \underline{A}_{22} \underline{I}_{2k}. \end{cases}$$

$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_{1k}}{\underline{I}_{2k}}$ - передаточное сопротивление при прямом к.з. (имеет размерность сопротивления – Ом).

$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{I}_{1k}}{\underline{I}_{2k}}$ - передаточный коэффициент по току в режиме прямого к.з.

(безразмерная величина).

4) Уравнения ЧП при обратном питании

Рассмотрим работу ЧП в режиме обратной передачи энергии (рис.8.12).

Подставим в уравнения в \underline{A} -параметрах (8.7) $\underline{I}_1 = -\underline{I}'_1$ и $\underline{I}_2 = -\underline{I}'_2$, а затем решим эти уравнения относительно \underline{U}_2 и \underline{I}'_2 .

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 - \underline{A}_{12}\underline{I}'_2; \\ -\underline{I}'_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 - \underline{A}_{22}\underline{I}'_2. \end{cases}$$



Рисунок 8.12

Определитель этой системы $\Delta = -\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = -1$.

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= -\frac{\underline{U}_1 - \underline{A}_{12}}{-\underline{I}'_1 - \underline{A}_{22}} = \underline{A}_{22}\underline{U}_1 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_1; \\ \underline{I}'_2 &= -\frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_1}{\underline{A}_{21} - \underline{I}'_1} = \underline{A}_{21}\underline{U}_1 + \underline{A}_{11}\underline{I}'_1; \\ \begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{A}_{22}\underline{U}_1 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_1; \\ \underline{I}'_2 = \underline{A}_{21}\underline{U}_1 + \underline{A}_{11}\underline{I}'_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Таким образом, при обратном питании меняются местами параметры \underline{A}_{11} и \underline{A}_{22} .

В некоторых учебниках принимают в этих уравнениях:

$\underline{A}_{22} = \underline{B}_{11}$; $\underline{A}_{12} = \underline{B}_{12}$; $\underline{A}_{21} = \underline{B}_{21}$; $\underline{A}_{11} = \underline{B}_{22}$ и называют их уравнениями в \underline{B} -параметрах.

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{B}_{11}\underline{U}_1 + \underline{B}_{12}\underline{I}'_1; \\ \underline{I}'_2 = \underline{B}_{21}\underline{U}_1 + \underline{B}_{22}\underline{I}'_1. \end{cases} \quad (8.9a)$$

$$\underline{B}_{11} \cdot \underline{B}_{22} - \underline{B}_{12} \cdot \underline{B}_{21} = 1.$$

Мы не будем использовать эти обозначения.

Существуют еще две формы уравнений ЧП, которые здесь не рассматриваются.

Несколько заключительных замечаний.

1) В любой форме записи уравнений ЧП из четырех первичных параметров независимыми являются три параметра, т.к. существуют связи между параметрами:

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}; \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}; \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1.$$

2) При переходе от прямого питания ЧП к обратному в уравнениях в форме \underline{A} поменялись местами параметры \underline{A}_{11} и \underline{A}_{22} . Если бы эти параметры были одинаковы, то уравнения остались бы неизменными.

Такой ЧП, у которого при перемене мест подключения источника и приемника режимы их работы не меняются, называется симметричным (рис.8.13).

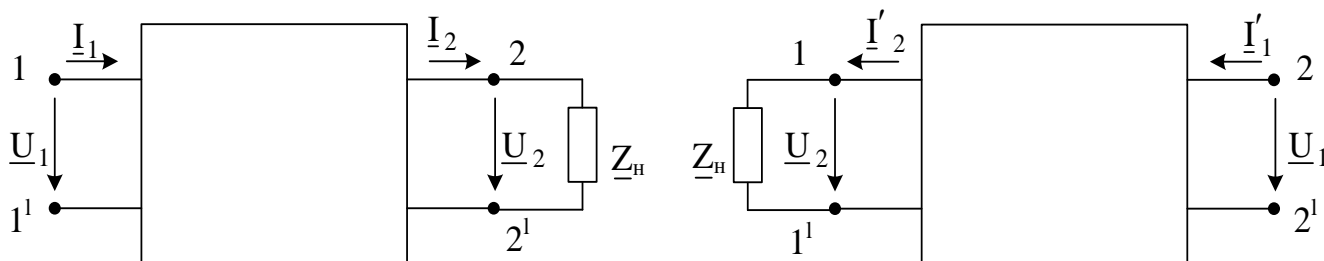


Рисунок 8.13

У симметричных ЧП $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$. Кроме того, в этом случае $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$, $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$.

Таким образом, симметричные ЧП имеют два независимых параметра в любой форме записи уравнений.

8.4. Матричная форма записи уравнений ЧП

1) Уравнения в \underline{Y} - параметрах

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}'_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2. \end{cases}$$

Матричная форма: $\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix} = (\underline{Y}) \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$, где $(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix}$.

2) Уравнения в \underline{Z} - параметрах

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}'_2; \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}'_2. \end{cases}$$

Матричная форма: $\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = (\underline{Z}) \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix}$, где $(\underline{Z}) = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix}$.

3) Уравнения в \underline{A} - параметрах

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2. \end{cases}$$

Матричная форма: $\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = (\underline{A}) \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$, где $(\underline{A}) = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix}$.

8.5. Сложные ЧП

Сложным называется четырехполюсник, который может быть представлен в виде соединения двух или нескольких простых ЧП.

1) Параллельное соединение ЧП

Входные и выходные зажимы двух ЧП соединяются параллельно (рис.8.14).

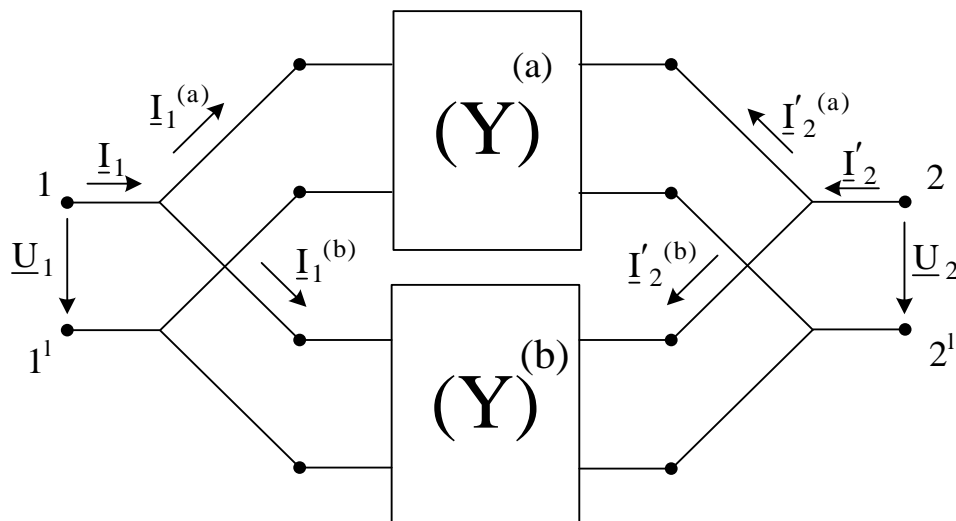


Рисунок 8.14

Запишем уравнения каждого ЧП в \underline{Y} - параметрах в матричной форме и сложим эти уравнения.

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1^{(a)} \\ \underline{I}_2^{(a)} \end{pmatrix} = (\underline{Y})^{(a)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \underline{I}_1^{(b)} \\ \underline{I}_2^{(b)} \end{pmatrix} = (\underline{Y})^{(b)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

По первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1^{(a)} + \underline{I}_1^{(b)}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2^{(a)} + \underline{I}_2^{(b)},$$

поэтому после сложения уравнений (8.10) получим:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \{(\underline{Y})^{(a)} + (\underline{Y})^{(b)}\} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = (\underline{Y}) \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } (\underline{Y}) = (\underline{Y})^{(a)} + (\underline{Y})^{(b)}. \quad (8.11)$$

Таким образом, при параллельном соединении четырехполюсников складываются матрицы \underline{Y} -параметров составных ЧП.

2) Последовательное соединение ЧП

Первичные и вторичные зажимы двух ЧП соединяются последовательно (рис. 8.15).

Запишем уравнения ЧП в \underline{Z} - параметрах в матричной форме и сложим их.

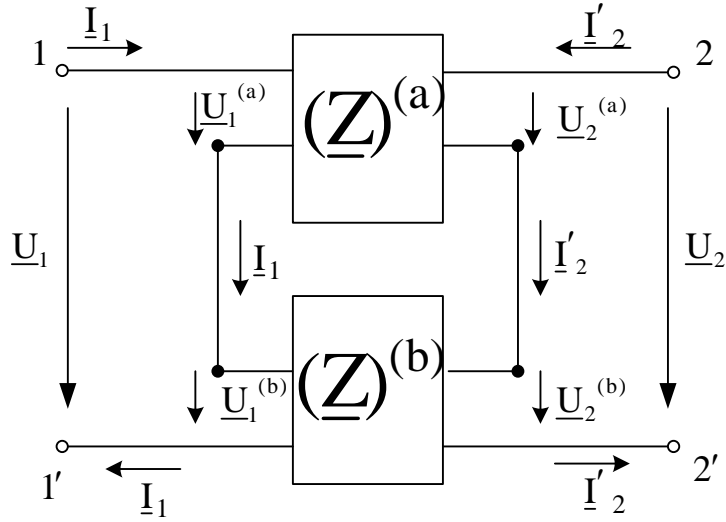


Рисунок 8.15

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1^{(a)} \\ \underline{U}_2^{(a)} \end{pmatrix} = (\underline{Z})^{(a)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1^{(b)} \\ \underline{U}_2^{(b)} \end{pmatrix} = (\underline{Z})^{(b)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

По второму закону Кирхгофа:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1^{(a)} + \underline{U}_1^{(b)}; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_2^{(a)} + \underline{U}_2^{(b)},$$

поэтому после суммирования матричных уравнений (8.12) получим:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \left\{ (\underline{Z})^{(a)} + (\underline{Z})^{(b)} \right\} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix} = (\underline{Z}) \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix},$$

где $(\underline{Z}) = (\underline{Z})^{(a)} + (\underline{Z})^{(b)}$. (8.13)

Таким образом, при последовательном соединении четырехполюсников складываются матрицы \underline{z} -параметров составных ЧП.

3) Каскадное соединение ЧП

Каскадным называется такое соединение четырехполюсника, при котором выходные зажимы предыдущего ЧП являются входными зажимами последующего ЧП (рис. 8.16).

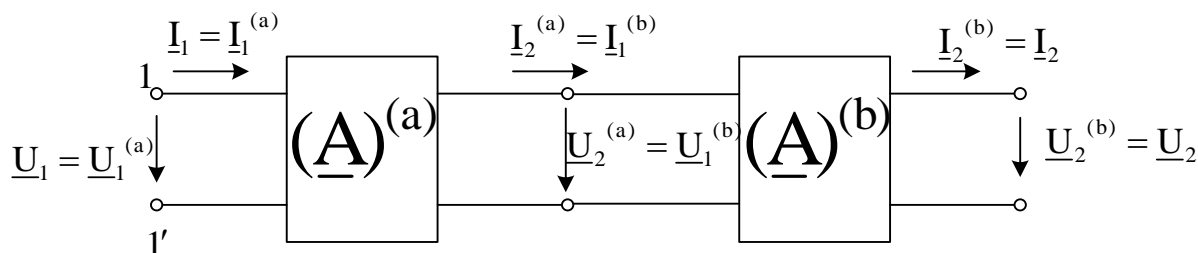


Рисунок 8.16

Запишем уравнения каждого ЧП в \underline{A} - параметрах в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = (\underline{A})^{(a)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2^{(a)} \\ \underline{I}_2^{(a)} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1^{(b)} \\ \underline{I}_1^{(b)} \end{pmatrix} = (\underline{A})^{(b)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2^{(b)} \\ \underline{I}_2^{(b)} \end{pmatrix}. \quad (8.14)$$

Но при каскадном соединении: $\underline{U}_2^{(b)} = \underline{U}_2$; $\underline{I}_2^{(b)} = \underline{I}_2$.

$$\underline{U}_2^{(a)} = \underline{U}_1^{(b)}; \quad \underline{I}_2^{(a)} = \underline{I}_1^{(b)}, \text{ следовательно, } \begin{pmatrix} \underline{U}_2^{(a)} \\ \underline{I}_2^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1^{(b)} \\ \underline{I}_1^{(b)} \end{pmatrix}, \text{ и}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \left\{ (\underline{A})^{(a)} \cdot (\underline{A})^{(b)} \right\} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = (\underline{A}) \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } (\underline{A}) = (\underline{A})^{(a)} \cdot (\underline{A})^{(b)}. \quad (8.15)$$

Таким образом, при каскадном соединении перемножаются матрицы \underline{A} -параметров составных четырехполюсников.

8.6. Схемы замещения ЧП

Если два четырехполюсника имеют одинаковые первичные параметры, то они эквивалентны друг другу.

Схемой замещения ЧП называется простейший четырехполюсник, эквивалентный данному ЧП.

Поскольку в любой форме записи уравнений четырехполюсника содержится три независимых параметра, то простейший ЧП, эквивалентный заданному, должен состоять из трех элементов. Трехэлементных схем ЧП существует две: Т-образная и П-образная схемы. Рассмотрим их.

Применим следующую методику. Сначала определим первичные параметры схемы замещения ЧП, а затем решим обратную задачу – найдем сопротивления или проводимости элементов схемы замещения ЧП с такими же первичными параметрами.

1) Т-образная схема замещения ЧП (рис. 8.17)

Запишем уравнения Т-образной схемы по законам Кирхгофа, а затем преобразуем их таким образом, чтобы получить уравнения, подобные уравнениям четырехполюсника в той или иной форме записи. Поскольку схема имеет три ветви, то она описывается системой трех уравнений: одно по первому и два по второму законам Кирхгофа.

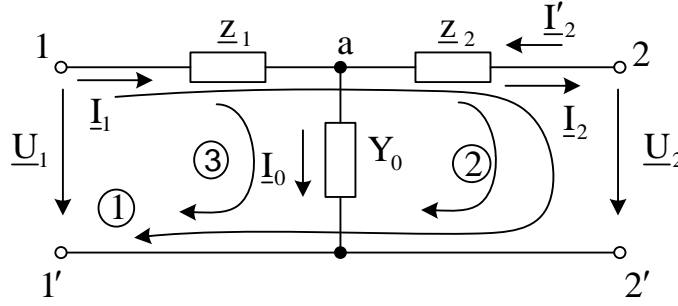


Рисунок 8.17

$$\text{Для узла } a: -I_1 + I_2 + I_0 = 0. \quad (8.16)$$

$$\text{Для контура 1: } I_1 Z_1 + I_2 Z_2 + U_2 - U_1 = 0. \quad (8.17)$$

$$\text{Для контура 2: } I_2 Z_2 + U_2 - I_0 Z_0 = 0. \quad (8.18)$$

Преобразуем эти уравнения к виду уравнений ЧП в \underline{A} -параметрах (8.7).

Из уравнения (8.18) имеем:

$$I_0 = \frac{I_2 Z_2 + U_2}{Z_0} = I_2 Z_2 Y_0 + U_2 Y_0. \quad (8.19)$$

Подставим (8.19) в (8.16):

$$I_1 = I_2 + I_2 Z_2 Y_0 + U_2 Y_0 = U_2 Y_0 + I_2 (1 + Z_2 Y_0). \quad (8.20)$$

Сравним (8.20) с уравнением ЧП в \underline{A} -параметрах (8.7)

$$I_1 = \underline{A}_{21} U_2 + \underline{A}_{22} I_2.$$

Очевидно, для Т-образной схемы

$$\underline{A}_{21} = Y_0 \text{ и } \underline{A}_{22} = 1 + Z_2 Y_0. \quad (8.21)$$

Подставим (8.20) в (8.17) и преобразуем:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= (\underline{U}_2 \underline{Y}_0 + \underline{I}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0) \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2 = \\ &= \underline{U}_2 (1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0) + \underline{I}_2 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0).\end{aligned}\quad (8.22)$$

Сравним (8.22) с уравнением ЧП в \underline{A} -параметрах (8.7):

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2.$$

Приравняем коэффициенты при \underline{U}_2 и \underline{I}_2 :

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0; \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0. \quad (8.23)$$

Теперь можно с помощью соотношений (8.21) и (8.23) решить обратную задачу – найти сопротивления или проводимости Т-образной схемы, эквивалентной данному четырехполюснику с такими же \underline{A} -параметрами, как и у Т-образной схемы.

$$\underline{Y}_0 = \underline{A}_{21}; \quad \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}}. \quad (8.24)$$

Решим подобную задачу, считая, что известны \underline{Z} -параметры некоторого четырехполюсника.

Сначала найдем \underline{Z} -параметры Т-образной схемы.

Введем в уравнение Кирхгофа $\underline{I}'_2 = -\underline{I}_2$ и контур 3 вместо контура 1:

$$-\underline{I}_1 - \underline{I}'_2 + \underline{I}_0 = 0; \quad \underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}'_2. \quad (8.25)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_0 \underline{I}_0. \quad (8.26)$$

$$-\underline{Z}_2 \underline{I}'_2 + \underline{U}_2 - \underline{Z}_0 \underline{I}_0 = 0; \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}'_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_0. \quad (8.27)$$

Подставим (8.25) в (8.26) и (8.27) и преобразуем их.

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_0 (\underline{I}_1 + \underline{I}'_2) = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_0) \underline{I}_1 + \underline{Z}_0 \underline{I}'_2 \quad (8.28)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}'_2 + (\underline{I}_1 + \underline{I}'_2) \underline{Z}_0 = \underline{Z}_0 \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0) \underline{I}'_2 \quad (8.29)$$

Сравнивая (8.28) и (8.29) с уравнениями ЧП в \underline{Z} -параметрах (8.2), можно сделать вывод, что для Т-образной схемы \underline{Z} -параметры выражаются следующим образом:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_0; \quad \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0; \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_0. \quad (8.30)$$

По известным \underline{z} -параметрам заданного ЧП определим параметры его Т-образной схемы замещения:

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}; \quad \underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}; \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{21}. \quad (8.31)$$

2) П-образная схема замещения ЧП (рис. 8.18)

Схема имеет пять ветвей и описывается системой из пяти уравнений по законам Кирхгофа: для узлов а и б и для контуров 1, 2, 3:

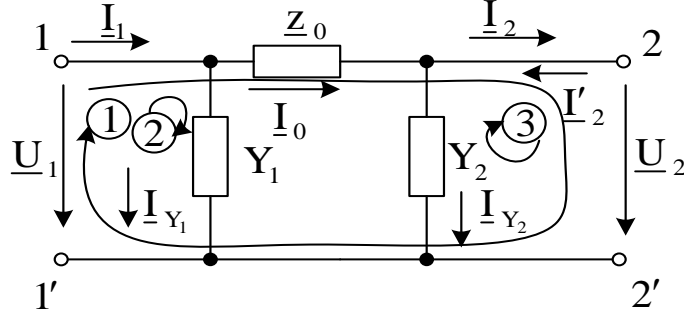


Рисунок 8.18

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{Y_1} + \underline{I}_0; \quad (8.32)$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_2 + \underline{I}_{Y_2}; \quad (8.33)$$

$$\underline{Z}_0 \underline{I}_0 + \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = 0; \quad (8.34)$$

$$\underline{I}_{Y_1} = \underline{U}_1 \underline{Y}_1; \quad (8.35)$$

$$\underline{I}_{Y_2} = \underline{U}_2 \underline{Y}_2. \quad (8.36)$$

Подставим (8.36) в (8.33), а затем (8.33) в (8.34):

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2; \quad (8.37)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_0 (\underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2) + \underline{U}_2 = (1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2. \quad (8.38)$$

Сравним (8.36) с уравнением ЧП в \underline{A} -параметрах:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2.$$

Очевидно, для П-образной схемы

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2; \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_0. \quad (8.39)$$

Подставим (8.37) и (8.35) в (8.32), а затем используем уравнение (8.38):

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{U}_1 \underline{Y}_1 + \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 = \left[\underline{Z}_0 (\underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2) + \underline{U}_2 \right] \underline{Y}_1 + \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 = \\ &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1 \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1) \underline{I}_2. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Сравним (8.40) с уравнением в \underline{A} -параметрах:

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2.$$

Получим для П-образной схемы:

$$\underline{A}_{21} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1\underline{Y}_2\underline{Z}_0; \quad \underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z}_0\underline{Y}_1. \quad (8.41)$$

Решим уравнения (8.39) и (8.41) относительно параметров П-образной схемы, эквивалентной заданному ЧП:

$$\underline{Z}_0 = \underline{A}_{12}; \quad \underline{Y}_1 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{12}}; \quad \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{12}}. \quad (8.42)$$

Решим аналогичную задачу для случая, когда известны \underline{Y} -параметры некоторого четырехполюсника, для чего определим \underline{Y} -параметры П-образной схемы. Введем в уравнение (8.33) ток $\underline{I}'_2 = -\underline{I}_2$:

$$\underline{I}_{Y_2} = \underline{I}_0 + \underline{I}'_2; \quad \underline{I}'_2 = \underline{I}_{Y_2} + \underline{I}_0. \quad (8.43)$$

Остальные уравнения по законам Кирхгофа не изменятся.

Из уравнения (8.34) получим:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_0} = (\underline{U}_1 - \underline{U}_2)\underline{Y}_0. \quad (8.44)$$

Подставляем (8.44) и (8.35) в (8.32):

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1\underline{Y}_1 + (\underline{U}_1 - \underline{U}_2)\underline{Y}_0 = \underline{U}_1(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_0) + \underline{U}_2(-\underline{Y}_0), \quad (8.45)$$

а также (8.36) и (8.44) в (8.43):

$$\underline{I}'_2 = \underline{U}_2\underline{Y}_2 - (\underline{U}_1 - \underline{U}_2)\underline{Y}_0 = \underline{U}_1(-\underline{Y}_0) + \underline{U}_2(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_0). \quad (8.46)$$

Сравнивая (8.44) и (8.45) с уравнениями ЧП в \underline{Y} -параметрах (8.1), можно заключить, что П-образная схема имеет такие \underline{Y} -параметры:

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_0; \quad \underline{Y}_{22} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0; \quad \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_0. \quad (8.47)$$

Для того чтобы П-образная схема была эквивалентна заданному ЧП, она должна иметь следующие параметры:

$$\underline{Y}_0 = -\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}; \quad \underline{Y}_1 = \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12}; \quad \underline{Y}_2 = \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{21}. \quad (8.48)$$

Таким образом, для заданного ЧП всегда можно составить Т- или П-образную схему замещения.

Если исследуемый четырехполюсник симметричен, то его схемы замещения также окажутся симметричными, т.е. в Т-образной схеме получим $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$, а в П-образной схеме $-\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2$.

8.7. Экспериментальное определение первичных параметров ЧП

Поскольку в общем случае в любой форме записи уравнений ЧП содержатся три независимых параметра, то для их определения необходимо провести три опыта холостого хода и короткого замыкания при прямом и обратном питании четырехполюсника.

В каждом из опытов нужно иметь возможность составить комплексы входного сопротивления, для чего необходимо включить три электроизмерительных прибора: вольтметр, амперметр и фазометр.

Рассмотрим экспериментальное определение \underline{A} -параметров четырехполюсника, для чего используем результаты опытов прямого холостого хода, обратного холостого хода и обратного короткого замыкания.

1) Опыт прямого холостого хода. $\underline{I}_2 = 0$ (рис. 8.19)

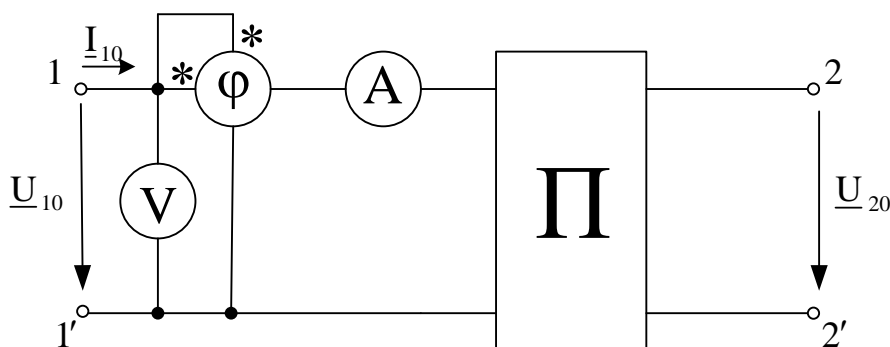


Рисунок 8.19

Уравнения ЧП при прямом питании:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2. \end{cases}$$

В режиме холостого хода приобретают вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_{10} = \underline{A}_{11}\underline{U}_{20}; \\ \underline{I}_{10} = \underline{A}_{21}\underline{U}_{20}; \end{cases} \quad \underline{Z}_{10} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}. \quad (8.49)$$

С другой стороны, по экспериментальным данным:

$$\underline{Z}_{10} = \frac{U_{10}}{I_{10}} e^{j\varphi_{10}}. \quad (8.49a)$$

2) Опыт обратного холостого хода $I'_1 = 0$ (рис. 8.20)

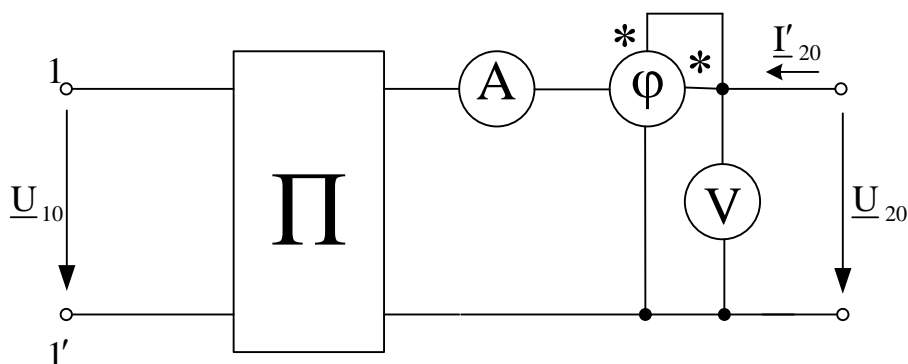


Рисунок 8.20

Уравнения ЧП при обратном питании:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{A}_{22}\underline{U}_1 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_1; \\ \underline{I}'_2 = \underline{A}_{21}\underline{U}_1 + \underline{A}_{11}\underline{I}'_1. \end{cases}$$

При обратном холостом ходе:

$$\begin{cases} \underline{U}_{20} = \underline{A}_{22}\underline{U}_{10}; \\ \underline{I}'_{20} = \underline{A}_{21}\underline{U}_{10}; \end{cases} \quad \underline{Z}_{20} = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{I}'_{20}} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}. \quad (8.50)$$

По экспериментальным данным

$$\underline{Z}_{20} = \frac{U_{20}}{I'_{20}} e^{j\varphi_{20}}. \quad (8.50a)$$

3) Опыт обратного короткого замыкания: $\underline{U}_1 = 0$ (рис. 8.21)

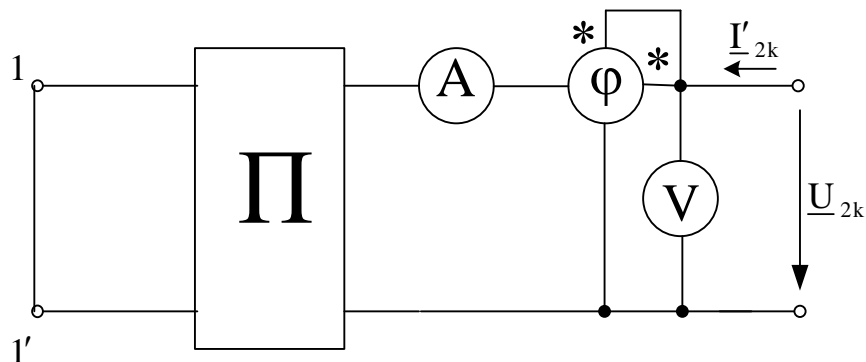


Рисунок 8.21

$$\begin{cases} \underline{U}_{2k} = \underline{A}_{12} \underline{I}'_{1k}; \\ \underline{I}'_{2k} = \underline{A}_{11} \underline{I}'_{1k}; \end{cases} \quad \underline{Z}_{2k} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}. \quad (8.51)$$

По показаниям приборов:

$$\underline{Z}_{2k} = \frac{\underline{U}_{2k}}{\underline{I}'_{2k}} e^{j\varphi_{2k}}. \quad (8.51a)$$

$$\text{Из (8.49):} \quad \underline{A}_{21} = \underline{A}_{11} / \underline{Z}_{10}. \quad (8.52)$$

$$\text{Из (8.50):} \quad \underline{A}_{22} = \underline{A}_{21} \underline{Z}_{20} = \frac{\underline{A}_{11} \underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10}}. \quad (8.53)$$

$$\text{Из (8.51):} \quad \underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{2k}. \quad (8.54)$$

Между \underline{A} -параметрами существует связь: $\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1$
Подставим в эту связь соотношения (8.52), (8.53) и (8.54):

$$\underline{A}_{11}^2 \left(\frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10}} - \frac{\underline{Z}_{2k}}{\underline{Z}_{10}} \right) = 1,$$

$$\text{откуда} \quad \underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{2k}}}. \quad (8.55)$$

Определив параметр \underline{A}_{11} можно с помощью соотношений (8.52), (8.53) и (8.54) определить остальные \underline{A} -параметры.

Для симметричного четырехполюсника $\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{20}$ и $\underline{Z}_{1k} = \underline{Z}_{2k}$. В этом случае достаточно двух опытов:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1k}}}. \quad (8.55a)$$

8.8. Вторичные параметры симметричного четырехполюсника

Как было указано выше, симметричный ЧП в любой форме записи уравнений имеет два независимых параметра. Введем такие два параметра, которые характеризовали бы режим работы ЧП с точки зрения передачи сигнала через ЧП. Эти параметры называются вторичными параметрами. У симметричного ЧП, естественно, два вторичных параметра.

Одним из них является характеристическое, или повторное, сопротивление \underline{Z}_C .

Характеристическим сопротивлением симметричного четырехполюсника называется такое сопротивление нагрузки, при котором входное сопротивление равно этому же сопротивлению нагрузки (рис. 8.22).

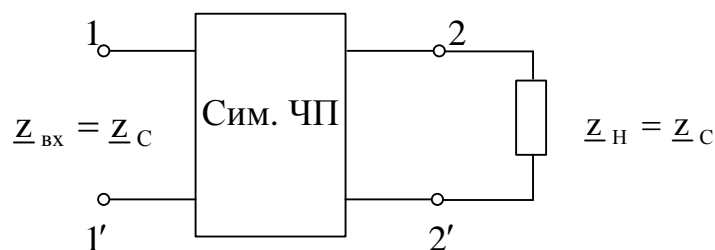


Рисунок 8.22

Для симметричного ЧП $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$, и его уравнения в \underline{A} -параметрах имеют вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{11}\underline{I}_2. \end{cases} \quad (8.56)$$

Сопротивление нагрузки $\underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$, а входное сопротивление $\underline{Z}_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$.

Найдем связь между \underline{Z}_i и $\underline{Z}_{\hat{a}\hat{o}}$, для чего разделим уравнения (8.56) одно на другое:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{I}_2(\underline{A}_{11}\underline{Z}_H + \underline{A}_{12})}{\underline{I}_2(\underline{A}_{21}\underline{Z}_H + \underline{A}_{11})} = \underline{Z}_{\hat{a}\hat{o}}.$$

Из определения характеристического сопротивления имеем:

$$\frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_C + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_C + \underline{A}_{11}} = \underline{Z}_C;$$

$$\underline{A}_{11}\underline{Z}_C + \underline{A}_{12} = \underline{A}_{21}\underline{Z}_C^2 + \underline{A}_{11}\underline{Z}_C,$$

откуда
$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}. \quad (8.57)$$

Такая нагрузка симметричного ЧП, когда $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$, называется согласованной нагрузкой.

Рассмотрим режим согласованной нагрузки: $\underline{U}_2 = \underline{Z}_C \underline{I}_2$ или $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C}$.

Преобразуем уравнения четырехполюсника:

$$\underline{U}_1 = \left(\underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_C} \right) \underline{U}_2 = \left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right) \underline{U}_2.$$

$$\underline{I}_1 = \left(\underline{Z}_C \underline{A}_{21} + \underline{A}_{11} \right) \underline{I}_2 = \left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right) \underline{I}_2.$$

Таким образом, при согласованной нагрузке симметричного ЧП

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} = e^{\underline{\Gamma}}. \quad (8.58)$$

Величина $\underline{\Gamma}$ называется мерой передачи и является вторым из вторичных параметров.

В общем случае мера передачи – это комплексное число:

$$\underline{\Gamma} = \ln \left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right) = a + jb. \quad (8.59)$$

Разберемся в физическом смысле составляющих меры передачи.

$$\underline{\Gamma} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln \frac{\underline{U}_1 e^{j\Psi_{u_1}}}{\underline{U}_2 e^{j\Psi_{u_2}}} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} + j(\Psi_{u_1} - \Psi_{u_2}).$$

Таким образом, величина

$$a = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}_2}, \quad (8.60)$$

показывает, как изменяется величина напряжения, тока или полной мощности при прохождении через симметричный ЧП в случае согласованной нагрузки, и называется коэффициентом затухания.

Величина

$$b = \Psi_{u_1} - \Psi_{u_2} = \Psi_{i_1} - \Psi_{i_2} \quad (8.61)$$

показывает, как изменяется фаза напряжения или тока при прохождении через симметричный ЧП в случае согласованной нагрузки, и называется коэффициентом фазы.

С точки зрения математики, a и b – величины безразмерные, но им принято приписывать определенные размерности.

Коэффициент затухания a измеряют в неперах (Нп). 1 Нп – такое затухание, при котором напряжение или ток при прохождении через симметричный четырехполюсник уменьшается в e раз (e – основание натуральных логарифмов):

$$\frac{U_1}{U_2} = e; \quad a = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln e = 1 \text{ НБ}.$$

Коэффициент фазы b измеряется в радианах.

В радиотехнике выражают a через затухание мощности и измеряют его в белах (Б):

$$a(\text{Б}) = \lg \frac{S_1}{S_2} = \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = 2 \lg \frac{U_1}{U_2} = 2 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

1Б – такое затухание, при котором мощность на выходе симметричного четырехполосника в 10 раз меньше мощности на его входе.

Децибел (дБ) – единица, в десять раз меньше бела.

$$a(\text{дБ}) = 10 \lg \frac{S_1}{S_2} = 10 \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

$$1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ НБ}; 1 \text{ НБ} = 8,686 \text{ дБ}$$

8.9. Уравнения симметричного четырехполосника, записанные через его вторичные параметры

Выразим \underline{A} -параметры симметричного ЧП через вторичные параметры. Как было обозначено ранее (8.58).

$$e^{\Gamma} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}.$$

Найдем обратную величину:

$$e^{-\Gamma} = \frac{1}{\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}} = \frac{\underline{A}_{11} - \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}}{\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} = \underline{A}_{11} - \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \quad (8.62)$$

Знаменатель предыдущего выражения равен единице. Если сложить (8.58) и (8.62), получим

$$e^{\Gamma} + e^{-\Gamma} = 2\underline{A}_{11} \text{ или } \underline{A}_{11} = \frac{e^{\Gamma} + e^{-\Gamma}}{2} = \text{ch} \Gamma. \quad (8.63)$$

Если же вычесть выражения (8.58) и (8.62), получим

$$e^{\Gamma} - e^{-\Gamma} = 2\sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \text{ или } \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} = \frac{e^{\Gamma} - e^{-\Gamma}}{2} = \text{sh} \Gamma. \quad (8.64)$$

Кроме того, известно, что $\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}$ из (8.57).

Умножим (8.64) на (8.57):

$$\sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} \cdot \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \underline{A}_{12} = \text{sh}\underline{\Gamma} \cdot \underline{Z}_C. \quad (8.65)$$

Разделим (8.64) на (8.57):

$$\sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} / \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \underline{A}_{21} = \frac{\text{sh}\underline{\Gamma}}{\underline{Z}_C}. \quad (8.66)$$

Таким образом, можно записать уравнения симметричного четырехполюсника через его вторичные параметры:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ch}\underline{\Gamma} + \underline{Z}_C \underline{I}_2 \text{sh}\underline{\Gamma}; \\ \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \text{sh}\underline{\Gamma} + \underline{I}_2 \text{ch}\underline{\Gamma}. \end{cases} \quad (8.67)$$

Как будет доказано в дальнейшем, подобным образом записываются уравнения длинной однородной линии в установившемся синусоидальном режиме.

8.10. Вторичные параметры несимметричных ЧП

Несимметричные ЧП имеют три вторичных параметра: два характеристических сопротивления \underline{Z}_{C1} и \underline{Z}_{C2} и меру передачи $\underline{\Gamma}$.

\underline{Z}_{C1} и \underline{Z}_{C2} - такая пара сопротивлений, что если одно из них является нагрузкой на вторичных зажимах ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_{C2}$), то другое является входным сопротивлением со стороны первичных зажимов ($\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{C1}$) и наоборот, при обратном питании, если $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{C1}$, то $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{C2}$ (рис. 8.23 а, б).

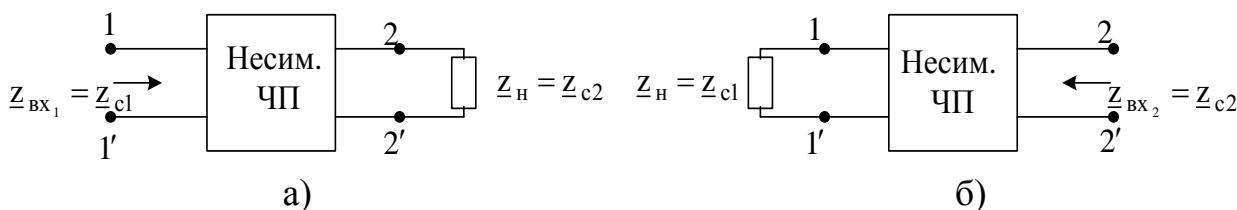


Рисунок 8.23

Можно доказать, что

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}}; \quad \underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}. \quad (8.68)$$

Мера передачи несимметричного четырехполюсника выражается следующим образом:

$$\underline{\Gamma} = \ln\left(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\right) \quad (8.69)$$

На этом закончим краткое рассмотрение теории четырехполюсников.

9. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

9.1. Вводные замечания

До сих пор мы изучали установившиеся режимы работы электрических цепей, при которых токи и напряжения либо постоянны, либо меняются по периодическим законам.

Между любыми двумя установившимися режимами работы в цепях, содержащих накопители энергии (индуктивность и емкость), как правило, имеет место переходный процесс, при котором токи и напряжения меняются непериодически.

Переход от одного установившегося режима к другому может быть вызван изменением параметров или схемы цепи. Изменение может происходить при нормальной работе установки либо в результате аварии (короткое замыкание, обрыв провода, пробой изоляции).

Любое изменение режима работы цепи принято называть коммутацией. Считают, что коммутация происходит мгновенно в момент $t=0$. В теории переходных процессов принята следующая терминология:

при $t < 0$ – установившийся режим, существовавший до коммутации;

$t = -0$ – последний момент перед коммутацией;

$t = 0+$ – первый момент после коммутации;

$t > 0$ – режим после коммутации, когда происходит переходный процесс;

$t \rightarrow \infty$ – установившийся режим после окончания переходного процесса.

Хотя коммутация происходит мгновенно, переход от одного установившегося режима к другому происходит в течение некоторого времени. Это объясня-

ется тем, что каждому состоянию цепи соответствует определенный запас энергии электрического и магнитного полей, который не может меняться мгновенно.

Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго, однако практически по прошествии долей секунды наступает режим, в котором токи и напряжения уже неотличимы от установившихся значений.

Тем не менее, расчет переходных процессов имеет важное значение для правильного выбора электрической аппаратуры. Кроме того, в установках радиотехники и автоматики переходные процессы являются нормальными режимами работы.

Существует несколько методов расчета переходных процессов. Основные методы мы рассмотрим в данном курсе.

Наиболее наглядным и простым с точки зрения математического аппарата является классический метод расчета переходных процессов.

9.2. Сущность классического метода расчета переходных процессов

Этот метод состоит в составлении и решении линейных дифференциальных уравнений, описывающих работу исследуемой цепи после коммутации.

С точки зрения математики, решение дифференциальных уравнений состоит из двух частей – частного решения уравнения с правой частью и общего решения уравнения без правой части. В курсе ТОЭ принято называть и обозначать эти составляющие иначе. Так, например, ток во время переходного процесса записывается следующим образом:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св.}}, \quad (9.1)$$

где $i_{\text{пр}}$ – принужденная составляющая тока, обусловленная существованием в цепи после коммутации стороннего источника, т.е. правой части уравнения. Принужденная составляющая возникает сразу после коммутации и остается в цепи после окончания переходного процесса. Форма ее записи зависит от характера

источника. Если в цепи действует постоянная ЭДС, то принужденный ток тоже постоянный, при синусоидальной ЭДС принужденный ток – синусоидален. Если же в цепи после коммутации отсутствует источник, принужденный ток равен нулю.

$i_{св}$ - свободная составляющая тока, которая существует только во время переходного процесса и с течением времени затухает во всех реальных цепях, т.е. в цепях, обладающих сопротивлением. Свободная составляющая возникает из-за несоответствия запаса энергии электромагнитных полей в последний момент перед коммутацией и того запаса энергии, который обусловлен принужденной составляющей в первый момент после коммутации.

Форма записи свободной составляющей зависит от числа накопителей энергии в цепи, которое совпадает с порядком дифференциального уравнения и не зависит от наличия и вида источника. При записи свободной составляющей вводятся произвольные постоянные, число которых также равно числу накопителей энергии. В ходе решения задачи произвольные постоянные определяются из начальных условий, для нахождения которых используют законы коммутации.

9.3. Законы коммутации

В электрических цепях существует два типа накопителей энергии – катушка индуктивности и конденсатор. Для мгновенного изменения запасов энергии магнитного или электрического полей потребовалась бы бесконечно большая мощность $P = \frac{dw}{dt}$, что физически невозможно. Поэтому энергии полей изменяются всегда плавно.

Первый закон коммутации

В цепи, обладающей индуктивностью, энергия накапливается в магнитном поле:

$$W_m = \frac{1}{2} \Psi i_L.$$

При постоянной индуктивности $\Psi = Li_L$ и $W_m = \frac{1}{2} Li_L^2$.

Поскольку запас энергии не может изменяться мгновенно, то не должны изменяться мгновенно те величины, от которых зависит запас энергии – потокосцепление Ψ и ток i_L . Физически это объясняется тем, что при скачкообразном изменении потокосцепления или тока при постоянной индуктивности в цепи возникала бы бесконечно большая ЭДС самоиндукции:

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} \text{ или } e_L = -L \frac{di_L}{dt},$$

что принципиально невозможно.

Сформулируем первый закон коммутации. В цепи, обладающей индуктивностью, ни потокосцепление, ни ток не могут изменяться мгновенно, скачком; они сохраняют в первый момент после коммутации те значения, которые они имели в последний момент перед коммутацией:

$$\begin{aligned} \Psi(0+) &= \Psi(-0); \\ i_L(0+) &= i_L(-0). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Чаще применяется запись закона для тока i_L , а запись для потокосцепления используется при мгновенном изменении индуктивности цепи.

Второй закон коммутации

В цепи, обладающей емкостью, энергия накапливается в электрическом поле:

$$W_e = \frac{1}{2} Qu_c.$$

При постоянной емкости $Q = cu_c$ и $W_e = \frac{1}{2}cu_c^2$.

Величины, от которых зависит запас энергии поля, а именно заряд Q и напряжение на конденсаторе u_c , не могут изменяться мгновенно. Физически это объясняется тем, что ток смещения в конденсаторе:

$$i_c = \frac{dQ}{dt} \text{ или } i_c = c \frac{du_c}{dt},$$

при скачкообразном изменении Q и u_c был бы бесконечно большим, что принципиально невозможно.

Сформулируем второй закон коммутации. В цепи, содержащей конденсатор, ни заряд, ни напряжение на конденсаторе не могут изменяться мгновенно, скачком; они сохраняют в первый момент после коммутации те значения, которые они имели в последний момент перед коммутацией:

$$\begin{aligned} Q(0+) &= Q(-0); \\ u_c(0+) &= u_c(-0). \end{aligned} \tag{9.3}$$

Чаще применяется запись относительно u_c ; непрерывность заряда используется при скачкообразном изменении емкости цепи.

Значения $i_L(0+)$ и $u_c(0+)$ называются независимыми начальными условиями. Напряжение на индуктивности, ток в конденсаторе, ток и напряжение на резисторе могут меняться скачком, а их начальные значения

$$u_L(0+), i_c(0+), i_R(0+), u_R(0+)$$

называются зависимыми начальными условиями.

9.4. Переходные процессы в цепях с одним индуктивным накопителем энергии.

Общие положения.

Рассмотрим простейшую цепь (рис. 9.1).

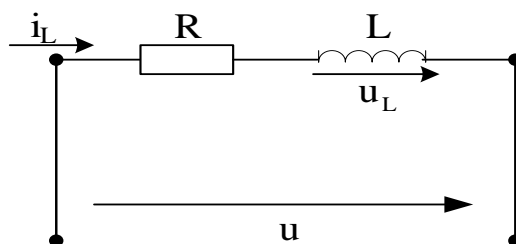


Рисунок 9.1

Работа такой цепи описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = u. \quad (9.4)$$

Решение этого уравнения записывается согласно (9.1):

$$i_L = i_{L \text{ пр}} + i_{L \text{ св}}, \quad (9.5)$$

где $i_{L \text{ пр}}$ зависит от вида и наличия правой части, т.е. приложенного напряжения u .

Рассмотрим свободную составляющую тока, т.е. решение уравнения без правой части:

$$Ri_{L \text{ св}} + L \frac{di_{L \text{ св}}}{dt} = 0. \quad (9.6)$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$R + Lp = 0, \quad (9.7)$$

которое имеет один отрицательный корень

$$p_1 = -\frac{R}{L}. \quad (9.8)$$

Решение уравнения (9.6) записывается в виде экспоненты:

$$i_{L\text{ св}} = Ae^{p_1 t}, \quad (9.9)$$

где A – неизвестная постоянная интегрирования, для определения которой используется I закон коммутации.

Величина

$$\tau_L = \frac{1}{|p_1|} = \frac{L}{R} \quad (9.10)$$

называется постоянной времени переходного процесса. Она измеряется в секун-

$$\text{дах: } [\tau_L] = \frac{\text{Гн}}{\text{Ом}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{с}.$$

Обычно свободную составляющую записывают так:

$$i_{L\text{ св}} = Ae^{-t/\tau_L}. \quad (9.11)$$

Знак « $-$ » в показателе степени свидетельствует о том, что с течением времени свободная составляющая затухает.

Хотя теоретически $i_{L\text{ св}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, но принято считать переходный процесс законченным, когда свободная составляющая уменьшается до 1% своего

начального значения. Найдём расчетную длительность переходного процесса $t_{п.п.}$:

$$0,01 = e^{-t_{пп}/\tau_L}; \ln 0,01 = -4,6 = -t_{пп}/\tau_L;$$

$$t_{пп} = 4,6\tau_L. \quad (9.12)$$

Построим график экспоненциальной зависимости e^{-t/τ_L} . В таблице 9.1 отражены значения этой функции в моменты времени, кратные τ_L . а на рис. 9.2 изображен ее график.

Таблица 9.1

t/τ_L	0	1	2	3	4,6
e^{-t/τ_L}	1	0,37	0,13	0,05	0,01

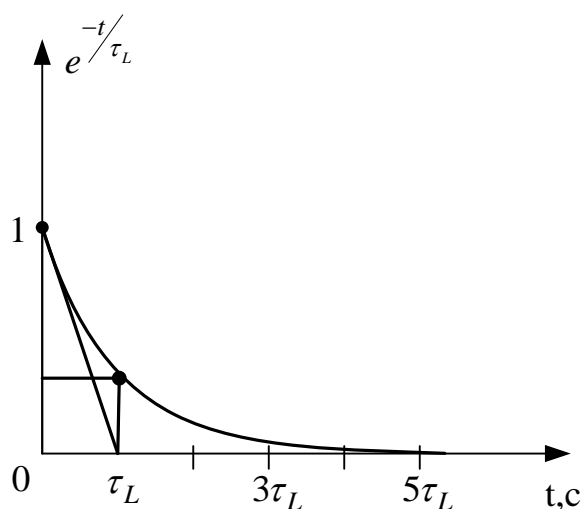


Рисунок 9.2

График экспоненциальной функции обладает тем свойством, что в любой ее точке длина подкасательной равна τ .

Рассмотрим конкретные примеры.

Короткое замыкание цепи R, L

В схеме (рис. 9.3) контакт переключается из положения 1 в положение 2.

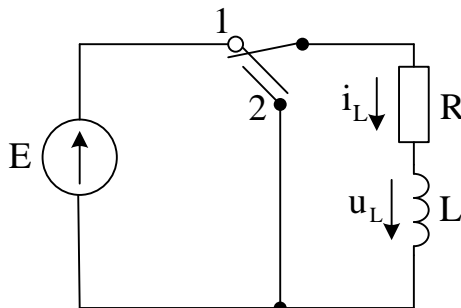


Рисунок 9.3

До коммутации, при $t < 0$, в цепи под действием постоянной ЭДС протекал постоянный ток:

$$i_L = \frac{E}{R}.$$

Напряжение на индуктивности при постоянном токе равно нулю:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = 0, \text{ т.е. при постоянном токе индуктивность не оказывает сопротивления току, она равносильна коротке.}$$

После коммутации, при $t > 0$, цепь описывается уравнением: $Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = 0$.

В такой цепи $i_{L \text{ пр}} = 0$, поскольку нет стороннего источника. Поэтому

В такой цепи $i_{L \text{ пр}} = 0$, поскольку нет стороннего источника. Поэтому

$$i_L = i_{L \text{ св}} = A e^{-t/\tau_L},$$

где $\tau_L = \frac{L}{R}$.

Определим постоянную интегрирования A с помощью первого закона коммутации:

$$\begin{aligned}
i_L(0+) &= i_L(-0); \\
i_L(0+) &= Ae^0 = A; \\
i_L(-0) &= \frac{E}{R}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $A = \frac{E}{R}$ и $i_L = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$ (9.13). Найдем напряжение на индуктивности:

$$u_L = L \frac{E}{R} \left(-\frac{R}{L} \right) e^{-\frac{R}{L}t} = -E e^{-t/\tau_L}. \quad (9.14)$$

В первый момент после коммутации $u_L(0+) = -E$. Это объясняется тем, что для поддержания тока в цепи на прежнем уровне должна возникнуть ЭДС самоиндукции $e_L(0+) = +E$, а напряжение $u_L(0+) = -e_L(0+) = -E$.

Графики i_L и u_L построены по уравнениям (9.13) и (9.14) и представлены на рис. 9.4.

Физический смысл переходного процесса состоит в том, что за его время энергия, которая была накоплена в магнитном поле до момента коммутации, выделяется в виде тепла в резисторе. Для доказательства вычислим энергию, которая выделяется в виде тепла за время переходного процесса:

$$\begin{aligned}
W_T &= \int_0^\infty R i_L^2 dt = R \frac{E^2}{R^2} \int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t} dt = \frac{E^2}{R} \left(-\frac{L}{2R} \right) e^{-\frac{2R}{L}t} \Big|_0^\infty = -\frac{LE^2}{2R^2} (0 - 1) = \frac{LE^2}{2R^2} = \\
&= \frac{L}{2} i_L^2(-0) = W_m(-0).
\end{aligned}$$

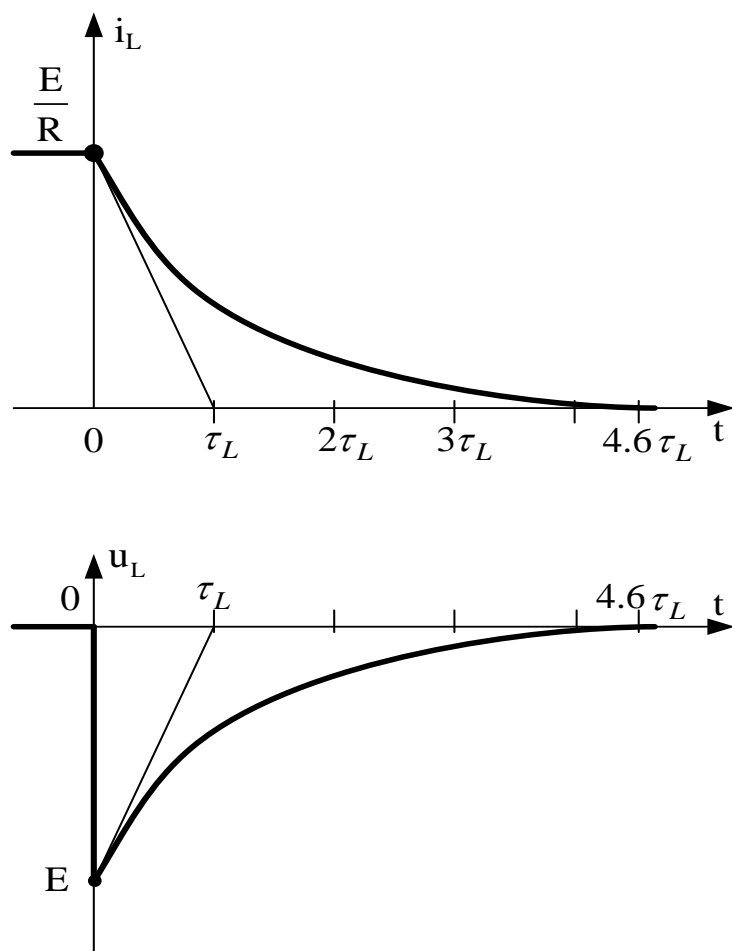


Рисунок 9.4

Включение цепи R, L на постоянное напряжение

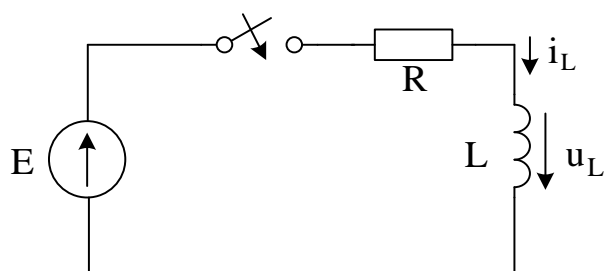


Рисунок 9.5

В схеме, изображенной на рисунке 9.5, имеют место нулевые начальные условия, поскольку до коммутации цепь была отключена от источника: при $t < 0$ $i_L = 0$; $u_L = 0$. После коммутации, при $t > 0$, цепь описывается уравнением:

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = E,$$

решение которого состоит из двух составляющих:

$$i_L = i_{L \text{ пр}} + i_{L \text{ св}},$$

где $i_{L \text{ пр}} = \frac{E}{R}$ – постоянный ток, обусловленный постоянной ЭДС, которому индуктивность не оказывает сопротивления;

$$i_{L \text{ св}} = A e^{-\frac{t}{\tau_L}}, \text{ причем } \tau_L = \frac{L}{R}.$$

Найдем постоянную A с помощью первого закона коммутации:

$$i_L(0+) = \frac{E}{R} + A; i_L(-0) = 0,$$

$$\frac{E}{R} + A = 0, \text{ откуда } A = -\frac{E}{R}.$$

Таким образом

$$i_L = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.15)$$

Найдем напряжение на индуктивности:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = L \left(-\frac{E}{R} \right) \left(-\frac{R}{L} \right) e^{-\frac{R}{L}t} = E e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.16)$$

В первый момент после коммутации $u_L(0+) = E$, поскольку $u_R(0+) = Ri_L(0+) = 0$ и все напряжение источника тратится на преодоление ЭДС самоиндукции. Графики i_L и u_L , построенные согласно уравнениям (9.15) и (9.16), представлены на рис. 9.6. График тока построен по составляющим.

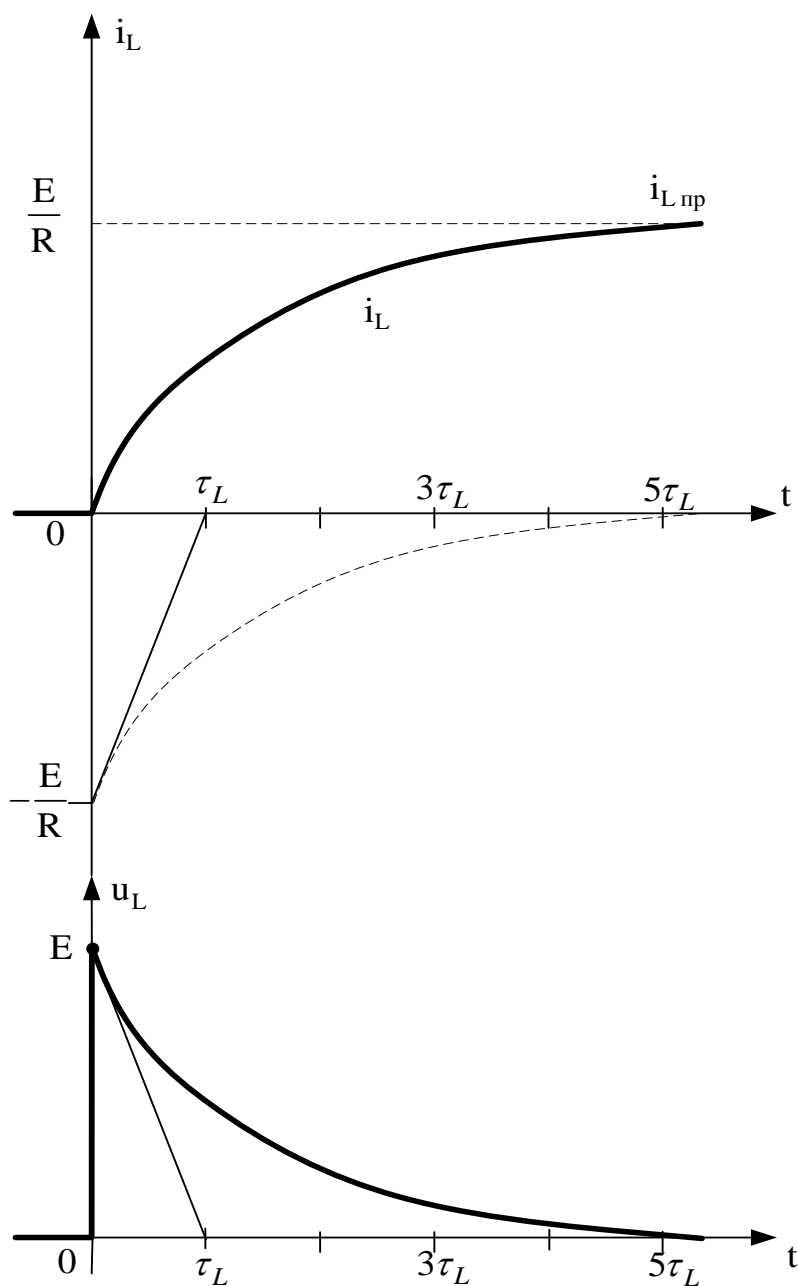


Рисунок 9.6

Включение цепи R, L на синусоидальное напряжение

К схеме (рис. 9.7) при нулевых начальных условиях подключается синусоидальная ЭДС: $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$.

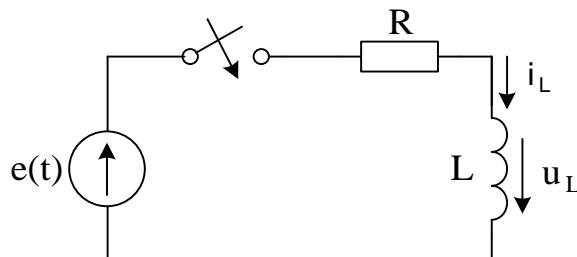


Рисунок 9.7

При $t < 0$ $i_L = 0$, $u_L = 0$.

$$\text{При } t > 0 \quad Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = e(t). \quad (9.17)$$

Решение этого уравнения состоит из двух составляющих:

$$i_L = i_{L\text{пр}} + i_{L\text{св}}. \quad (9.18)$$

Поскольку в правой части уравнения (9.17) имеется синусоидальная ЭДС, то после окончания переходного процесса в цепи установится синусоидальный ток:

$$i_{L\text{пр}} = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (9.19)$$

где $I_m = \frac{E_m}{z}$; $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; $\psi_i = \psi_e - \varphi$; $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$.

Для расчета принужденных составляющих $i_{L\text{пр}}$ и $u_{L\text{пр}}$ можно применить также комплексную форму записи. Эта методика будет показана при расчете цепи R, C .

Свободная составляющая не зависит от наличия и вида источника:

$$i_{L\text{св}} = Ae^{-t/\tau_L}; \quad (9.20)$$

$$\tau_L = \frac{L}{R}.$$

Подставляем (9.19) и (9.20) в (9.18) и применим первый закон коммутации для определения постоянной A

$$i_L = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) + Ae^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.21)$$

$$i_L(0+) = I_m \sin(\psi_e - \varphi) + A;$$

$$i_L(-0) = 0;$$

$$I_m \sin(\psi_e - \varphi) + A = 0,$$

откуда

$$A = -I_m \sin(\psi_e - \varphi). \quad (9.22)$$

Подставив (9.22) в (9.21) получим:

$$i_L = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - I_m \sin(\psi_e - \varphi)e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.23)$$

Напряжение на катушке индуктивности тоже состоит из двух составляющих: $u_L = u_{L\text{пр}} + u_{L\text{св}}$, причем $u_{L\text{пр}} = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{uL})$, где $U_{Lm} = \omega LI_m$, а $\psi_{uL} = \psi_i + 90^\circ = \psi_e - \varphi + 90^\circ$.

$$u_{L\text{св}} = L \frac{di_{L\text{св}}}{dt} = L \left[-I_m \sin(\psi_e - \varphi) \left(-\frac{R}{L} \right) \right] e^{-\frac{R}{L}t} = RI_m \sin(\psi_e - \varphi) e^{-t/\tau_L}.$$

Таким образом,

$$u_L = \omega L I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi + 90^\circ) + R i_m \sin(\psi_e - \varphi) e^{-t/\tau_L}. \quad (9.24)$$

Поскольку в выражения i_L (9.23) и u_L (9.24) входит величина ψ_e , то интенсивность переходного процесса зависит от момента подключения синусоидальной ЭДС. Рассмотрим два крайних случая.

1) Если $\psi_e = \varphi$, то $\psi_i = 0$; $\sin \psi_i = \sin(\psi_e - \varphi) = 0$.

$A = -I_m \sin(\psi_e - \varphi) = 0$ – в этом случае не возникает переходный процесс.

$$i_L = I_m \sin \omega t;$$

$$u_L = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Графики i_L, u_L для этого случая представлены на рис. 9.8.

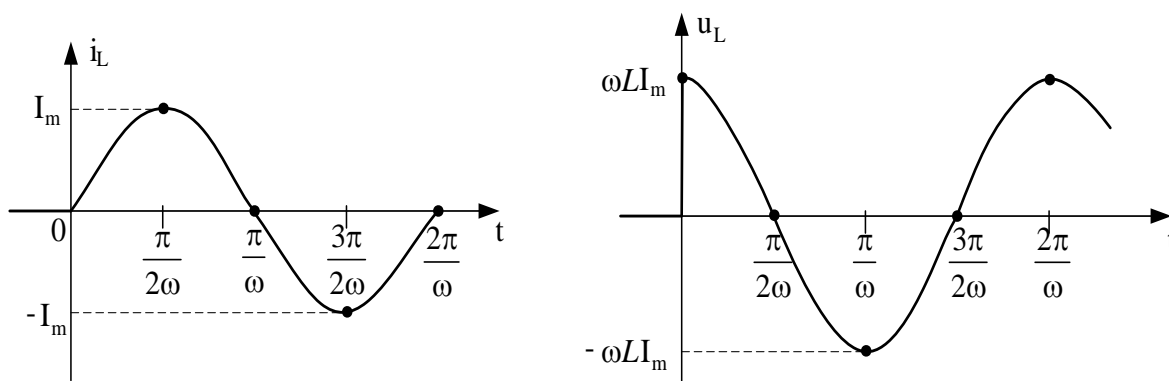


Рисунок 9.8

2) $\psi_e - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. Выберем значение $\psi_e = \varphi - 90^\circ$.

$$A = -I_m \sin(\psi_e - \varphi) = -I_m \sin(-90^\circ) = I_m;$$

$$i_L = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + I_m e^{-t/\tau_L} \quad (9.25)$$

$$u_L = \omega L I_m \sin \omega t - R I_m e^{-t/\tau_L} \quad (9.26)$$

График тока, построенный согласно (9.25), представлен на рис. 9.9.

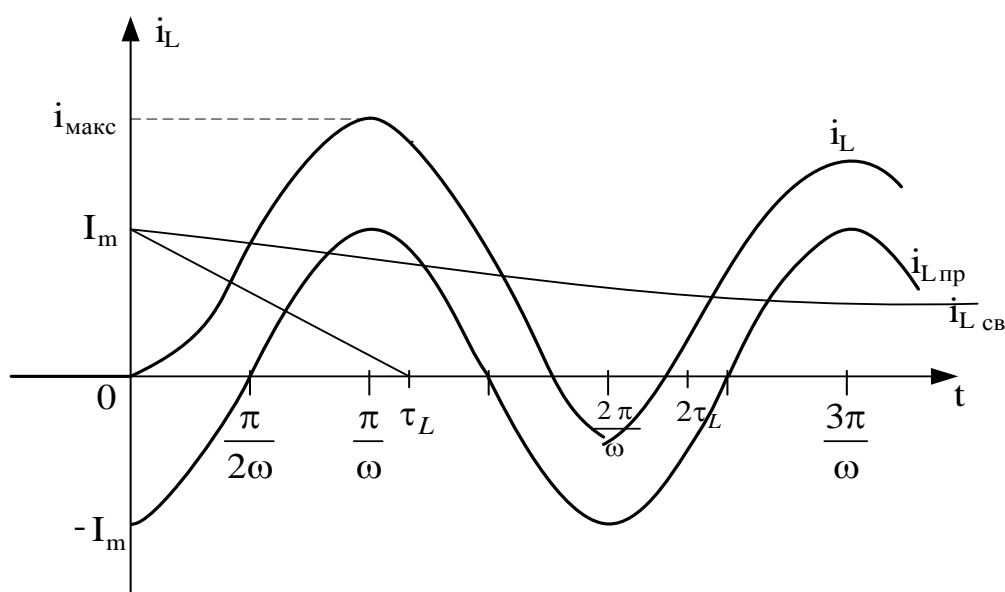


Рисунок 9.9

Если свободная составляющая затухает медленно, что возможно при малом значении R , через полпериода после включения ток достигает наибольшего значения $i_{\text{макс.}}$, которое в пределе стремится к $2I_m$, если $\tau \rightarrow \infty$. В реальных цепях свободная составляющая всегда затухает, и для выбора электрической аппаратуры принимают $i_{\text{макс}} = 1,8 I_m$.

График напряжения u_L показан на рис. 9.10.

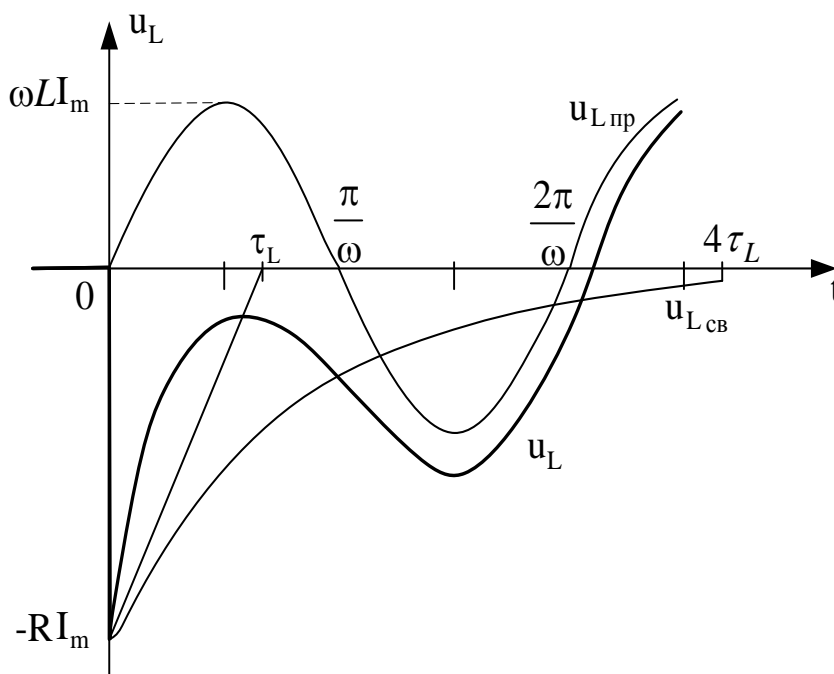


Рисунок 9.10

Если $R \gg \omega L$, то в первый момент после включения возможен значительный скачок напряжения на катушке: $|u_L(0+)| = RI_m \gg \omega LI_m$. Изоляция электроустановок должна быть выбрана с учетом этого возможного скачка напряжения. Таким образом, при синусоидальной ЭДС в цепи R, L при определенных условиях возникает сверхток $i_{\text{макс}}$ и перенапряжение на катушке индуктивности.

Расчет переходных процессов в разветвленных цепях с одним индуктивным накопителем энергии

Можно доказать, что переходный процесс в любой сколь угодно сложной цепи с одним индуктивным накопителем энергии описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка, которое удобно записать относительно тока в ветви с индуктивностью:

$$R_3 i_L + L \frac{di_L}{dt} = f(t), \quad (9.27)$$

где R_{Σ} – эквивалентное сопротивление цепи после коммутации относительно зажимов катушки индуктивности, причем все источники заменяются своими внутренними сопротивлениями.

Во всех ветвях цепи имеет место единый переходный процесс с постоянной времени

$$\tau_L = \frac{L}{R_{\Sigma}}.$$

Решение уравнения (9.27) записывается в виде

$$i_L = i_{Lпр} + i_{Lсв},$$

где $i_{Lпр}$ определяется наличием стороннего источника и его видом, $i_{Lсв}$ – экспоненциальная функция:

$$i_{Lсв} = Ae^{-t/\tau_L}.$$

Постоянная интегрирования A определяется с помощью первого закона коммутации.

Напряжение на индуктивности:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

Токи в остальных ветвях цепи также состоят из двух составляющих, причем принужденные составляющие определяются из расчета установившегося режима после окончания переходного процесса.

Свободный ток в ветви с индуктивностью можно рассматривать как источник свободных токов во всех ветвях цепи.

Пример расчета переходного процесса в цепи, изображенной на рис. 9.11.

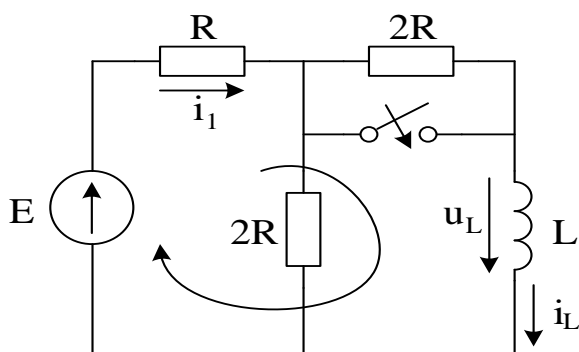


Рисунок 9.11

Искомой величиной будем считать $i_1(t)$.

До коммутации, при $t < 0$ под действием постоянной ЭДС в цепи протекали постоянные токи, а индуктивность равносильна коротке. Общее сопротивление этой цепи

$$R_{\text{общ}} = R + \frac{2R \cdot 2R}{4R} = 2R.$$

$$i_1 = \frac{E}{2R}; \quad i_L = i_1 \frac{2R}{4R} = \frac{E}{4R} \text{ — по формуле разброса токов в параллельном соединении.}$$

$$\text{Итак, } i_L(-0) = \frac{E}{4R}.$$

После коммутации, при $t > 0$, ищем

$$i_L = i_{L\text{пр}} + i_{L\text{св}}.$$

$$\text{В данном случае } i_{L\text{пр}} = i_{L\text{пр}} = \frac{E}{R}, \text{ т.к. после коммутации контакт замкнут, а индуктив-}$$

ность не оказывает сопротивления постоянному принужденному току.

$$i_{L\text{св}} = Ae^{-t/\tau_L}, \text{ где } \tau_L = \frac{L}{R_3}.$$

Схема для нахождения $R_{\mathfrak{Z}}$ представлена на рис. 9.12.

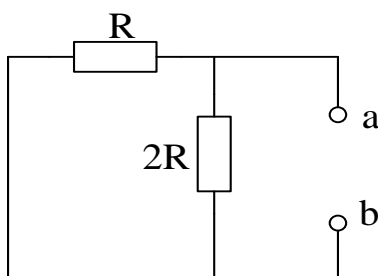


Рисунок 9.12

Разворачивая эту схему относительно зажимов индуктивности a и b , имеем:

$$R_{\mathfrak{Z}} = \frac{R \cdot 2R}{3R} = \frac{2R}{3}; \tau_L = \frac{3L}{2R}; \frac{1}{\tau_L} = \frac{2R}{3L}.$$

Таким образом, $i_L = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{2R}{3L}t}$.

На основании первого закона коммутации

$$i_L(0+) = i_L(-0), \text{ т.е. } \frac{E}{R} + A = \frac{E}{4R}, \text{ откуда } A = -\frac{3E}{4R}.$$

Тогда $i_L = \frac{E}{R} - \frac{3E}{4R}e^{-\frac{2R}{3L}t}$.

Схема для определения $i_{\text{лсв}}$ представлена на рис. 9.13.

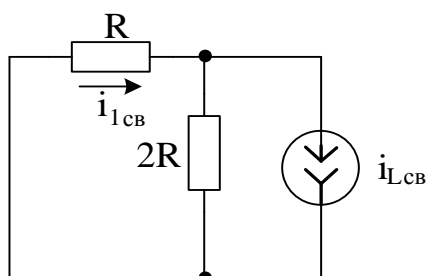


Рисунок 9.13

По формуле разброса можно записать:

$$i_{1\text{св}} = i_{L\text{св}} \cdot \frac{2R}{2R + R} = \frac{2}{3} i_{L\text{св}} = \frac{2}{3} \left(-\frac{3E}{4R} \right) e^{-\frac{2R}{3L}t} = -\frac{E}{2R} e^{-\frac{2R}{3L}t}.$$

Окончательно

$$i_1 = i_{\text{пр}} + i_{1\text{св}} = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R} e^{-t/\tau_L};$$

$$i_1(0+) = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R} = \frac{E}{2R} = i_1(-0).$$

т.е. в данном случае ток i_1 не имеет скачка в момент коммутации, хотя вообще такой скачок возможен. График $i_1(t)$ представлен на рис. 9.14.

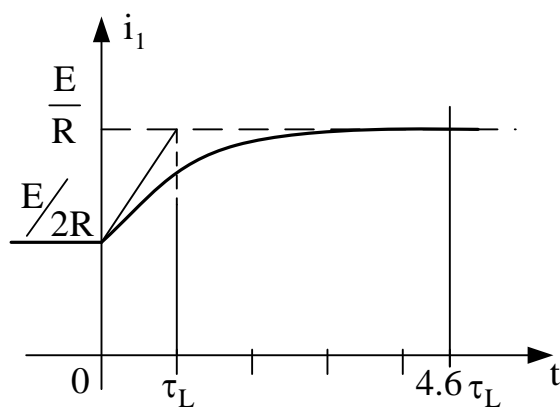


Рисунок 9.14

Выражение $i_1(t)$ можно было бы найти с помощью второго закона Кирхгофа для контура, показанного на рис. 9.11, если предварительно найти u_L :

$$Ri_1 + u_L = E;$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = L \left(-\frac{3E}{4R} \right) \cdot \left(-\frac{2R}{3L} \right) e^{-t/\tau_L} = \frac{E}{2} e^{-t/\tau_L};$$

$$i_1 = \frac{E - u_L}{R} = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R} e^{-t/\tau_L}.$$

9.5. Переходные процессы в цепях с одним емкостным накопителем энергии.

Общие положения

Работа такой цепи (рис. 9.15) описывается уравнением:

$$Ri_c + u_c = u; \quad (9.27)$$

$$u_c = \frac{1}{C} \int i_c dt;$$

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}.$$

Уравнение (9.27) запишем относительно u_c :

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u. \quad (9.28)$$

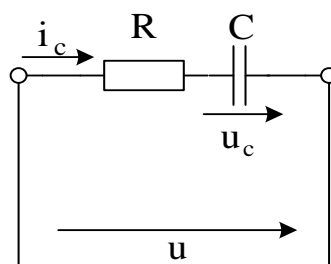


Рисунок 9.15

Решение уравнения (9.28) записывается в виде:

$$u_c = u_{\text{спр}} + u_{\text{св}}.$$

Переход к одной переменной u_c обусловлен тем, что именно напряжение на конденсаторе u_c не может измениться мгновенно, и подчиняется второму закону коммутации. Свободная составляющая $u_{\text{св}}$ является решением уравнения (9.28) без правой части:

$$RC \frac{du_{\text{св}}}{dt} + u_{\text{св}} = 0. \quad (9.29)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$RCp + 1 = 0, \quad (9.30)$$

а его единственный корень $p_1 = -\frac{1}{RC}$. Свободная составляющая напряжения на конденсаторе записывается в виде экспоненты:

$$u_{\text{св}} = Ae^{p_1 t}. \quad (9.31)$$

Постоянная интегрирования A затем определяется с помощью второго закона коммутации.

Величина $\tau_c = RC$ называется постоянной времени переходного процесса в цепи R, C и измеряется в секундах: $[\tau_c] = \Phi \cdot \text{Ом} = \frac{\text{С}}{\text{Ом}} \cdot \text{Ом} = \text{С}$.

Эта величина определяет длительность переходного процесса: $u_{\text{св}} = Ae^{-\frac{t}{\tau_c}}$. Знак “минус” в показателе степени говорит о том, что свободная составляющая затухает. Как и в цепи R, L , длительность переходного процесса составляет $4,6 \tau_c$.

Принуждённая составляющая $u_{\text{сп}}$ зависит от наличия источника и его вида.

Рассмотрим конкретные примеры.

Разряд конденсатора на резистор (рис.9.16)

До коммутации, при $t < 0$, конденсатор был заряжен до напряжения U_0 и сохранял это напряжение до момента коммутации: $u_c(-0) = U_0$. После коммутации, при $t > 0$, цепь описывается уравнением:

$$Ri_c + u_c = 0, \text{ или } RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0.$$

Поскольку сторонний источник отсутствует, то $u_{\text{сп}} = 0$.

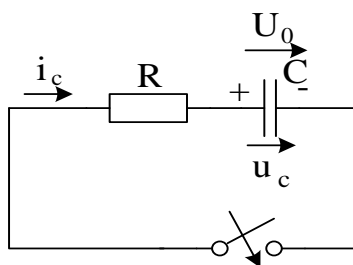


Рисунок 9.16

$$u_c = u_{\text{св}} = Ae^{\frac{-t}{\tau_c}} \text{ где } \tau_c = RC.$$

Определим постоянную интегрирования с помощью второго закона коммутации:

$$u_c(0+) = u_c(-0), \text{ откуда } A = U_0.$$

Следовательно:

$$u_c = U_0 e^{\frac{-t}{RC}}; i_c = C \frac{du_c}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (9.32)$$

Графики u_c , i_c показаны на рис. 9.17, u_c уменьшается, $\frac{du_c}{dt} < 0$, $i_c < 0$. Можно доказать, что за время переходного процесса та энергия, которая была накоплена в электрическом поле конденсатора до коммутации $W_e(-0) = \frac{CU_0^2}{2}$, выделяется в виде тепла в резисторе.

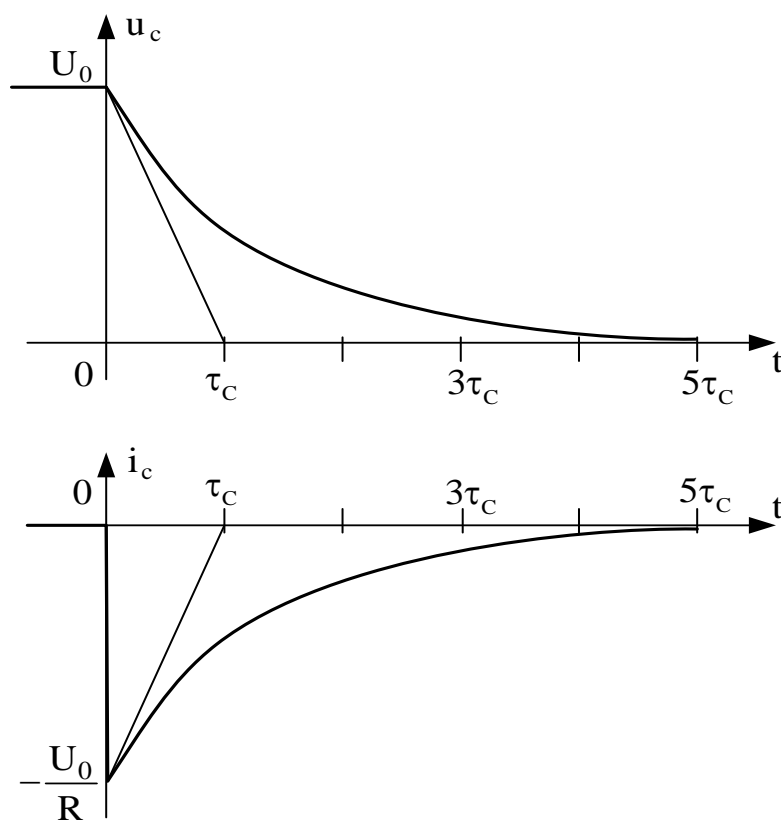


Рисунок 9.17

Включение цепи R, C на постоянное напряжение (рис.9.18)

Будем считать, что до коммутации, при $t < 0$ конденсатор не был заряжен, т.е. существовали нулевые начальные условия: $u_c = 0, i_c = 0$.

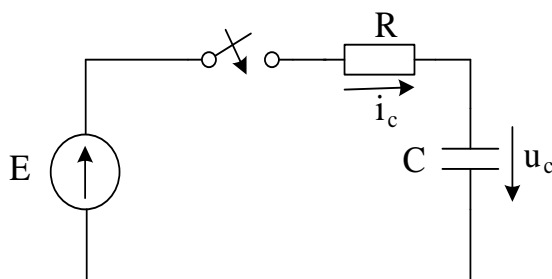


Рисунок 9.18

$t > 0$ Цепь описывается уравнением: $RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E$, решение которого

$u_c = u_{cnp} + u_{cсв}$. Поскольку $E = \text{const}$, то $u_{cnp} = \text{const}$; $i_{cnp} = C \frac{du_{cnp}}{dt} = 0$. Конденсатор не пропускает постоянного тока.

Поэтому $u_{cnp} = E$, т.е. в установившемся режиме u_c уравнивается E и ток в цепи прекратится.

$$u_{cн\hat{a}} = Ae^{\frac{-t}{\tau_c}}, \text{ где } \tau_c = RC.$$

Объединяем обе составляющие и применяем второй закон коммутации для определения постоянной A .

$$u_c = E + Ae^{\frac{-t}{\tau_c}}; u_c(0+) = E + A; u_c(-0) = 0.$$

$u_c(0+) = u_c(-0)$, следовательно, $E + A = 0$, откуда $A = -E$.

$$u_c = E - Ee^{\frac{-t}{\tau_c}}; i_c = C \frac{du_c}{dt} = C \left(-\frac{1}{RC} \right) \cdot \left(-Ee^{\frac{-t}{RC}} \right) = \frac{E}{R} e^{\frac{-t}{RC}} \quad (9.33)$$

Из полученных выражений можно сделать вывод, что в первый момент незаряженный конденсатор равносильен коротке и $i_c(0+) = \frac{E}{R}$, а в установившемся режиме для постоянного тока конденсатор представляет разрыв цепи, $i_{cпр} = 0$.

График u_c строим по составляющим и складываем их графически. Графики u_c и i_c представлены на рис. 9.19

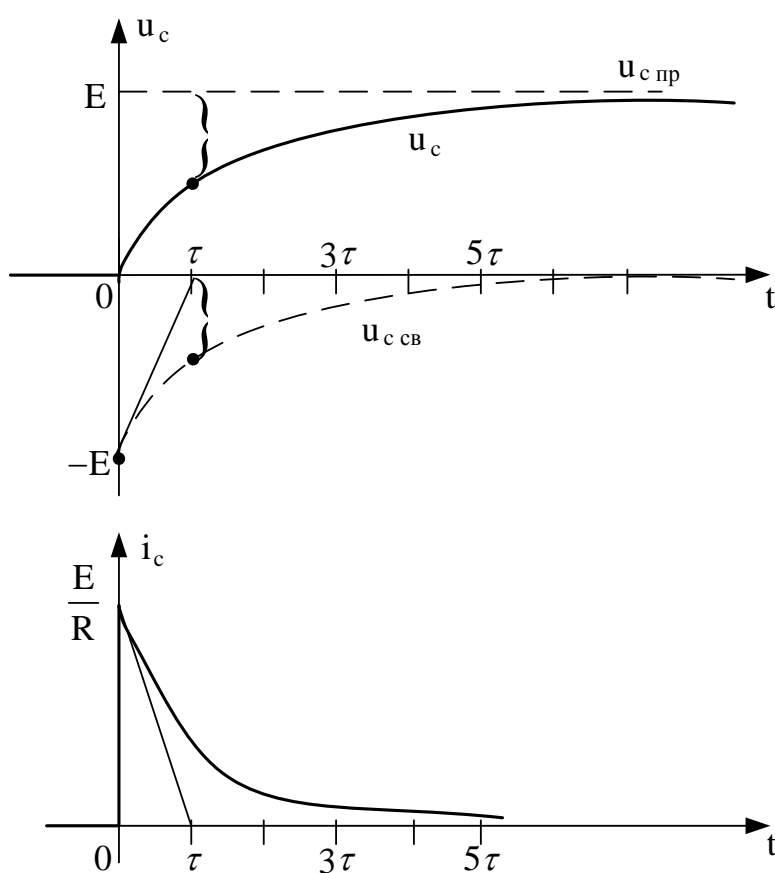


Рисунок 9.19

Включение цепи R, C на синусоидальное напряжение (рис. 9.20)

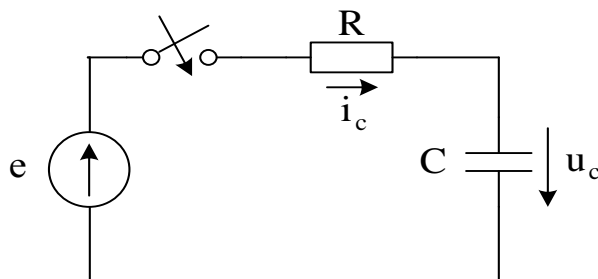


Рисунок 9.20

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e).$$

При $t < 0$ $u_c = 0$, $i_c = 0$.

При $t > 0$ запишем решение для напряжения на конденсаторе: $u_c = u_{\text{спр}} + u_{\text{свв}}$, где $u_{\text{спр}}$ – синусоидальная функция времени, обусловленная синусоидальной ЭДС источника. Используем комплексную форму записи для определения этой функции:

полное сопротивление $\underline{Z}_{i\delta} = R - j\frac{1}{\omega C} = ze^{j\varphi}$, где $z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$;

$$\varphi = \arctg\left(-\frac{1}{\omega CR}\right); \quad \underline{I}_{cm\ddot{\delta}} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_{i\delta}} = \frac{E_m e^{j\psi_e}}{ze^{j\varphi}} = I_{cm\ddot{\delta}} e^{j\psi_i};$$

$$\underline{U}_{cm\ddot{\delta}} = \underline{I}_{cm\ddot{\delta}} \left(-j\frac{1}{\omega C}\right) = \frac{1}{\omega \tilde{N}} I_{m\ddot{\delta}} e^{j\left(\psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Перейдём к мгновенному значению:

$$u_{c\dot{\delta}} = \frac{1}{\omega C} I_{cm\ddot{\delta}} \sin\left(\omega t + \psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$|\varphi| = \arctg \frac{1}{\omega CR}; U_{cmnp} = \frac{1}{\omega C} I_{cmnp}; u_{cсв} = A e^{\frac{-t}{\tau_c}}, \text{ где } \tau_c = RC.$$

Объединяем обе составляющие и находим постоянную интегрирования по второму закону коммутации.

$$u_c = U_{cm\ddot{\imath}\delta} \sin\left(\omega t + \psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2}\right) + A e^{\frac{-t}{RC}};$$

$$u_c(0+) = U_{cm\ddot{\imath}\delta} \sin\left(\psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2}\right) + A; \quad u_c(-0) = 0;$$

$$u_c(0+) = u_c(-0), \text{ т.е. } U_{cm\ddot{\imath}\delta} \sin\left(\psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2}\right) + A = 0,$$

$$\text{Откуда } A = -U_{cm\ddot{\imath}\delta} \sin\left(\psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$u_c = U_{cm\ddot{\imath}\delta} \sin\left(\omega t + \psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2}\right) - U_{cm\ddot{\imath}\delta} \sin\left(\psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{-t}{RC}} \quad (9.34)$$

$$i_c = i_{cnp} + i_{cсв}, \text{ где } i_{c\ddot{\imath}\delta} = I_{cm\ddot{\imath}\delta} \sin(\omega t + \psi_e + |\varphi|);$$

$$\begin{aligned} i_{c\hat{n}\hat{a}} &= C \frac{du_{\hat{n}\hat{a}}}{dt} = \tilde{N}(-U_{cm\ddot{\imath}\delta}) \sin\left(\psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2}\right) \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{\frac{-t}{RC}} = \\ &= \frac{U_{cm\ddot{\imath}\delta}}{R} \sin\left(\psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{-t}{\tau_c}} = I_{cm\ddot{\imath}\delta} \frac{1}{\omega CR} \sin\left(\psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{-t}{RC}}; \end{aligned}$$

$$i_c = I_{cm\ddot{\imath}\delta} \sin(\omega t + \psi_e + |\varphi|) + \frac{1}{\omega CR} I_{\tilde{m}\ddot{\imath}\delta} \sin(\psi_e + |\varphi|) e^{\frac{-t}{\tau_c}}. \quad (9.35)$$

Интенсивность переходного процесса зависит от момента включения, т.е. от величины ψ_e . Рассмотрим крайние случаи:

1) $\psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2} = 0$, $\psi_e + |\varphi| = \psi_{i\ddot{\delta}} = \frac{\pi}{2}$, $\sin\left(\psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Тогда $A = 0$ и переходный процесс отсутствует.

$$u_c = U_{cm\text{пр}} \sin \omega t; \quad i_c = I_{cm\text{пр}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (9.36)$$

Энергия электрического поля конденсатора плавно увеличивается с нуля вместе с напряжением u_c . Графики u_c и i_c имеют такой вид: (рис. 9.21):

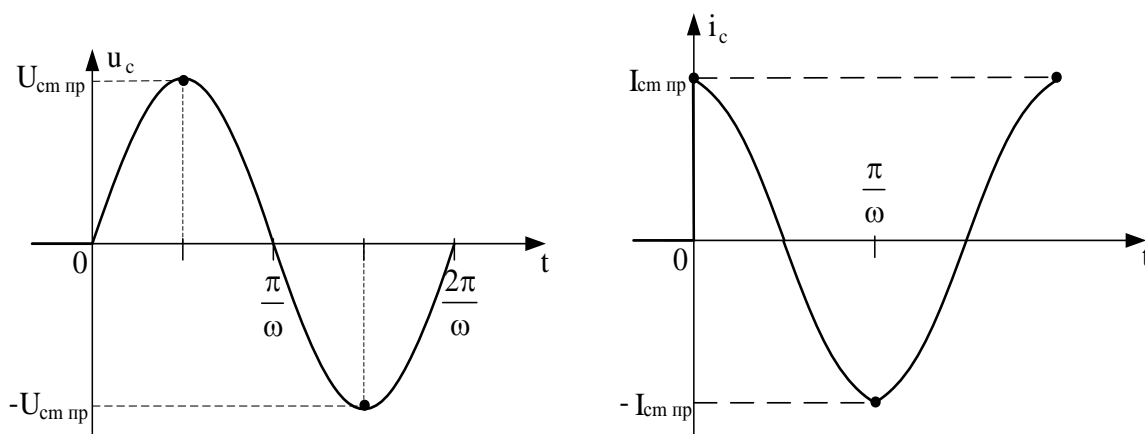


Рисунок 9.21

2) Если $\psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, $\psi_e + |\varphi| = 0$, $\sin\left(\psi_e + |\varphi| - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$,

$A = U_{cm\text{пр}}$. В этом случае:

$$u_c = U_{cm\ddot{\delta}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + U_{cm\ddot{\delta}} e^{\frac{-t}{RC}}; \quad i_c = I_{cm\text{пр}} \sin \omega t - \frac{U_{cm}}{R} e^{\frac{-t}{RC}}. \quad (9.37)$$

График u_c наиболее интересен при больших значениях R и τ_c (рис. 9.22)

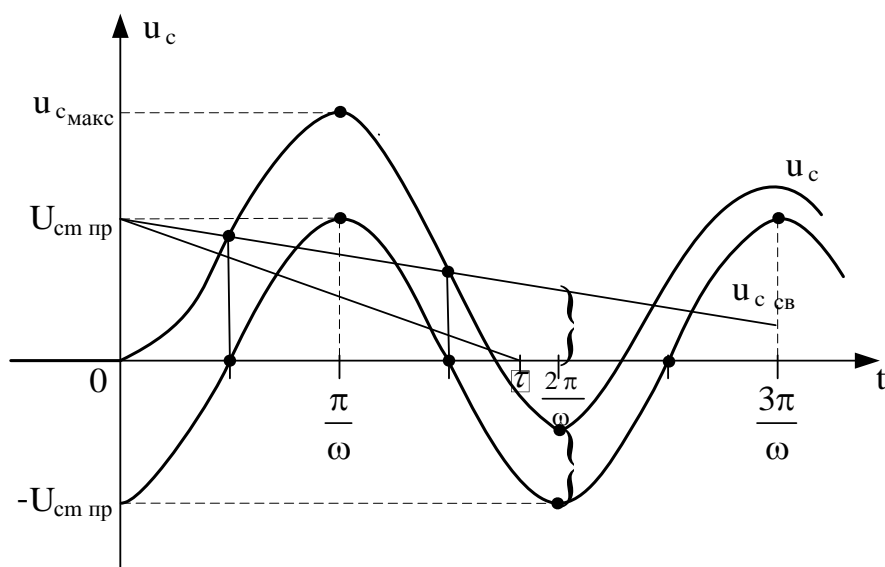


Рисунок 9.22

Максимальное значение $u_{c \max}$ наступает через полпериода после включения: $\lim_{R \rightarrow \infty} u_{c \max} = 2U_{cm пр}$. На практике считают $u_{c \max} = 1,8U_{cm пр}$.

Наибольший скачок тока в первый момент после коммутации возникает при малом значении R и $\frac{1}{\omega CR} \ll 1$.

Тогда график тока выглядит следующим образом (рис. 9.23).

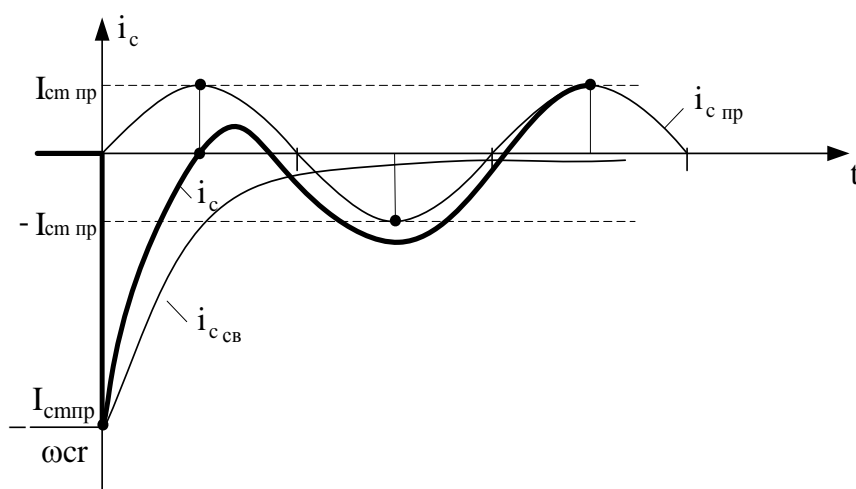


Рисунок. 9.23

Расчёт переходных процессов в разветвлённых цепях с одним ёмкостным накопителем энергии

Можно доказать, что переходный процесс в сколь угодно сложной цепи с одним ёмкостным накопителем энергии описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка следующего вида:

$$R_3 C \frac{du_c}{dt} + u_c = f(t), \quad (9.38)$$

где R_3 - эквивалентное активное сопротивление цепи относительно зажимов конденсатора после коммутации при условии, что все источники заменены своими внутренними сопротивлениями; $f(t)$ – функция, зависящая от стороннего источника.

Во всех ветвях цепи имеет место единый переходный процесс с постоянной времени

$$\tau_c = R_3 C.$$

Решение уравнения (9.38) записывается в виде:

$$U_c = u_{c \text{ пр}} + u_{c \text{ св}}.$$

Здесь $u_{c \text{ пр}}$ – принуждённая составляющая искомой величины, являющаяся частным решением уравнения (9.38) с правой частью.

$$u_{c \text{ пр}} = \begin{cases} U, & \text{если } f(t) = \text{const}; \\ U_{c_m} \sin(\omega t + \psi_{u_c}), & \text{если } f(t) \text{ – синусоидальна}; \\ 0, & \text{если } f(t) = 0. \end{cases}$$

Свободная составляющая $u_{\text{св}}$ является общим решением уравнения (9.38) без правой части и записывается в виде:

$$u_{\text{св}} = Ae^{\frac{-t}{\tau_c}}.$$

После объединения двух составляющих постоянная A определяется с помощью II закона коммутации. Затем можно определить ток:

$$i_c = C \frac{du_c}{dt},$$

а остальные величины выразить через u_c и i_c с помощью законов Кирхгофа.

Можно также рассматривать $u_{\text{св}}$, как источник свободной ЭДС, и определить свободные токи в остальных ветвях простой цепи, пользуясь формулой разброса токов, используя $i_{\text{св}}$.

Таким образом, все электрические цепи, которые содержат один накопитель энергии (L или C), описываются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка и называются цепями первого порядка.

Пример: Определить $i(t)$ в заданной схеме (рис. 9.24).

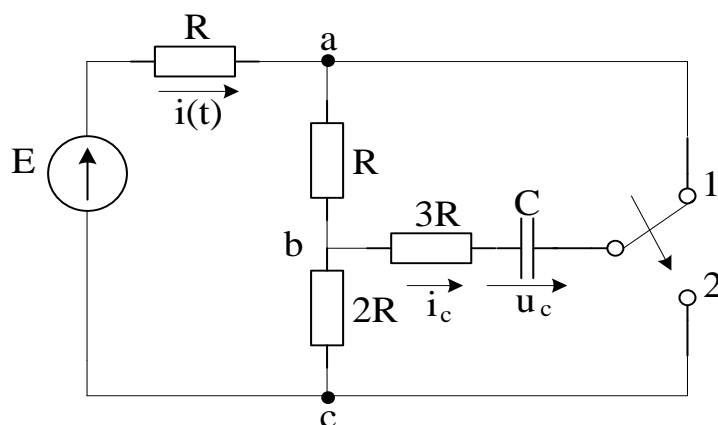


Рисунок 9.24

$$\underline{t < 0} \quad E = \text{const}; u_c = \text{const}; i_c = 0 \text{ (C - разрыв цепи); } R_{\text{общ}} = 4R; i = \frac{E}{4R};$$

$$u_c = -U_{ab} = -\frac{E}{4}; u_c(-0) = -\frac{E}{4}.$$

$$\underline{t > 0} \quad u_c = u_{\text{спр}} + u_{\text{свв}}; u_{\text{спр}} = \text{const, т.к. } E = \text{const}; i_{\text{спр}} = 0 \text{ (C - разрыв в установившемся режиме); } i_{\text{пр}} = \frac{E}{4R}; u_{\text{спр}} = +U_{bc} = i_{\text{пр}} 2R = \frac{E}{2}.$$

В данном случае происходит перезаряд конденсатора.

На рисунке 9.25 изображена схема для определения $R_{\text{э}}$.

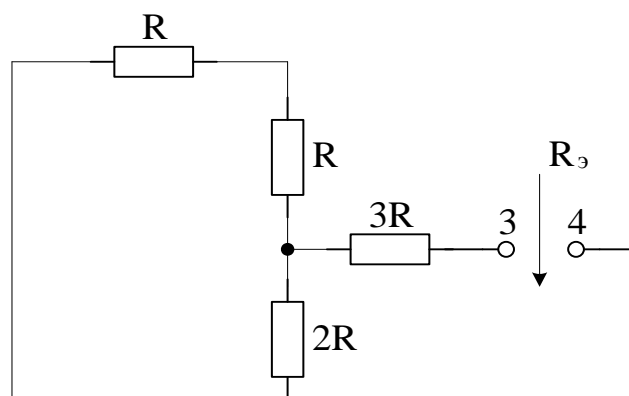


Рисунок 9.25

$$R_{\text{э}} = 3R + \frac{2R \cdot 2R}{4R} = 4R; \tau_c = 4RC; u_c = \frac{E}{2} + Ae^{\frac{-t}{4RC}};$$

$$u_c(0+) = \frac{E}{2} + A; u_c(-0) = -\frac{E}{4}; u_c(0+) = u_c(-0); \frac{E}{2} + A = -\frac{E}{4}; A = -\frac{3E}{4}.$$

$$u_c = \frac{E}{2} - \frac{3E}{4}e^{\frac{-t}{4RC}}; i_c = C \frac{du_c}{dt} = \frac{3E}{16R}e^{\frac{-t}{4RC}}.$$

Схема для определения $i_{\text{св}}$ представлена на рис. 9.26.

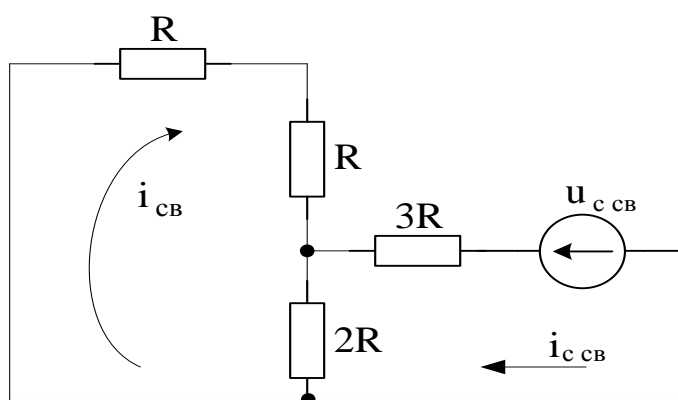


Рисунок 9.26

$$i_{ca} = i_{c\text{н}\grave{a}} \frac{2R}{4R} = \frac{3E}{32R} e^{\frac{-t}{4RC}}; i = i_{\text{г}\delta} + i_{\text{н}\grave{a}} = \frac{E}{4R} - \frac{3E}{32R} e^{\frac{-t}{\tau_c}}; \frac{E}{4R} = \frac{8E}{32R}; i(0+) = \frac{5E}{32R}.$$

График $i(t)$ изображен на рис. 9.27.

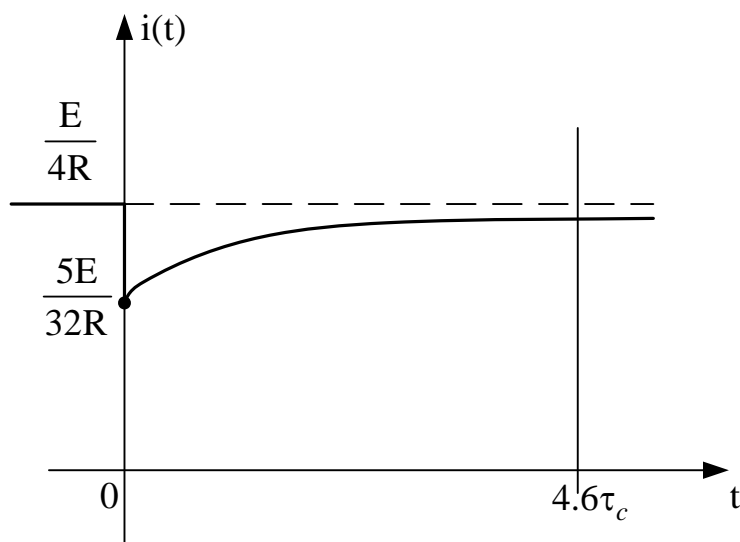


Рисунок 9.27

9.6 Переходные процессы в цепях R, L, C.

Общие положения

Цепь, изображенная на рис. 9.28, описывается интегрально-дифференциальным уравнением:

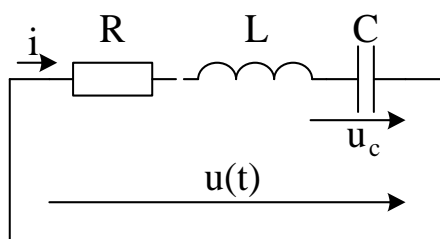


Рисунок 9.28

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u \quad (9.39)$$

Решение запишем в виде:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}},$$

где $i_{\text{пр}}$ зависит от u и является частным решением уравнения (9.39) с правой частью; $i_{\text{св}}$ – общее решение того же уравнения без правой части:

$$Ri_{\text{св}} + L \frac{di_{\text{св}}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{\text{св}} dt = 0 \quad (9.40)$$

Продифференцируем (9.40) и разделим на L :

$$\frac{d^2 i_{\text{св}}}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di_{\text{св}}}{dt} + \frac{1}{LC} i_{\text{св}} = 0 \quad (9.41)$$

Уравнение (9.41) – линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Таким образом, порядок дифференциального уравнения цепи совпадает с числом независимых накопителей энергии (L и C). Цепь R, L, C называют цепью второго порядка.

В (9.41) обозначим:

$$\frac{R}{L} = 2\delta ; \quad \delta = \frac{R}{2L}; \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 i_{\text{св}}}{dt^2} + 2\delta \frac{di_{\text{св}}}{dt} + \omega_0^2 i_{\text{св}} = 0, \quad (9.41a)$$

которому соответствует характеристическое уравнение:

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0,$$

имеющее следующие корни: $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

При этом возможны три случая:

1) $\delta > \omega_0$; $\theta = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Корни характеристического уравнения вещественные, отрицательные, разные:

$$p_1 = -\delta + \theta; \quad p_2 = -\delta - \theta;$$

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

2) $\delta = \omega_0$. Корни характеристического уравнения вещественные, отрицательные, равные: $p_1 = p_2 = -\delta$;

$$i_{\text{св}} = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t}.$$

3) $\delta < \omega_0$; $p_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_c$ - корни характеристического уравнения комплексные, сопряжённые:

$$i_{\text{н\acute{a}}} = (A_1 \cos \omega_c t + A_2 \sin \omega_c t) e^{-\delta t} = I_{m\text{н\acute{a}}} e^{-\delta t} \sin(\omega_c t + \psi_{i\text{н\acute{a}}}),$$

где $I_{m\text{св}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$; $\psi_{i\text{н\acute{a}}} = \arctg \frac{A_1}{A_2}$.

Во всех случаях свободная составляющая содержит две постоянных интегрирования, для определения которых необходимо иметь два начальных условия. Они могут быть получены путём применения двух законов коммутации, т.к. в этой цепи ни ток i , ни напряжение на конденсаторе u_c не могут изменяться скачком.

Включение цепи R, L, C на постоянное напряжение (рис. 9.29)

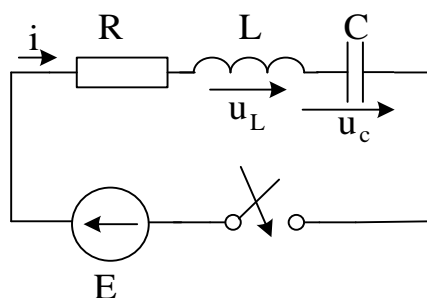


Рисунок 9.29

Начальные условия будем считать нулевыми: $i = 0$ и $u_c = 0$ при $t < 0$. В первый момент после коммутации $i(0+) = 0$; $u_c(0+) = 0$. Согласно уравнению цепи имеем:

$$Ri(0+) + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} + u_c(0+) = E,$$

$$\text{откуда } \left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = \frac{E}{L}.$$

Итак, для тока известно начальное значение самой функции $i(0+) = 0$ и начальное значение её производной $\left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = \frac{E}{L}$, что позволит в дальнейшем определить две постоянных интегрирования. В зависимости от соотношения параметров цепи, возможны три случая. Во всех случаях $i_{\text{пр}} = 0$, т.к. конденсатор не пропускает постоянного тока.

$$1) \delta > \omega_0; p_{1,2} = -\delta \pm \theta; i = i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

$$\frac{di}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}; i(0) = A_1 + A_2 = 0; A_2 = -A_1;$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{E}{L}, \text{ или } A_1 (p_1 - p_2) = \frac{E}{L};$$

$$p_1 - p_2 = -\delta + \theta + \delta + \theta = 2\theta, \text{ откуда } A_1 = \frac{E}{2\theta L}.$$

$$i = \frac{E}{2\theta L} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}); \quad (9.42)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{2\theta} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}); \quad (9.43)$$

$$u_c = u_{\text{спр}} + u_{\text{св}}; u_{\text{с пр}} = E;$$

$$\begin{aligned}
u_{\text{св}} &= \frac{1}{C} \int i dt = \frac{E}{2\theta LC} \left(\frac{1}{p_1} e^{p_1 t} - \frac{1}{p_2} e^{p_2 t} \right) = \frac{E}{2\theta LC p_1 p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) = \\
&= -\frac{E}{2\theta} (p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}); \\
u_c &= E - \frac{E}{2\theta} (p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}); \tag{9.44}
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что $p_1 p_2 = (-\delta + \theta)(-\delta - \theta) = \delta^2 - \theta^2 = \delta^2 - \delta^2 + \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$;

$LC p_1 p_2 = 1$. Обозначим $\tau_1 = \frac{1}{|p_1|} = \frac{1}{\delta - \theta}$; $\tau_2 = \frac{1}{|p_2|} = \frac{1}{\delta + \theta}$; $\tau_1 > \tau_2$.

Длительность переходного процесса определяется временем затухания экспоненты с постоянной времени τ_1 , $i = \frac{E}{2\theta L} \left(e^{\frac{-t}{\tau_1}} - e^{\frac{-t}{\tau_2}} \right)$.

При $t = 0$ обе экспоненты компенсируются, а затем через $t \geq 4,6\tau_2$, остается только одна из них.

График тока выглядит следующим образом (рис.9.30).

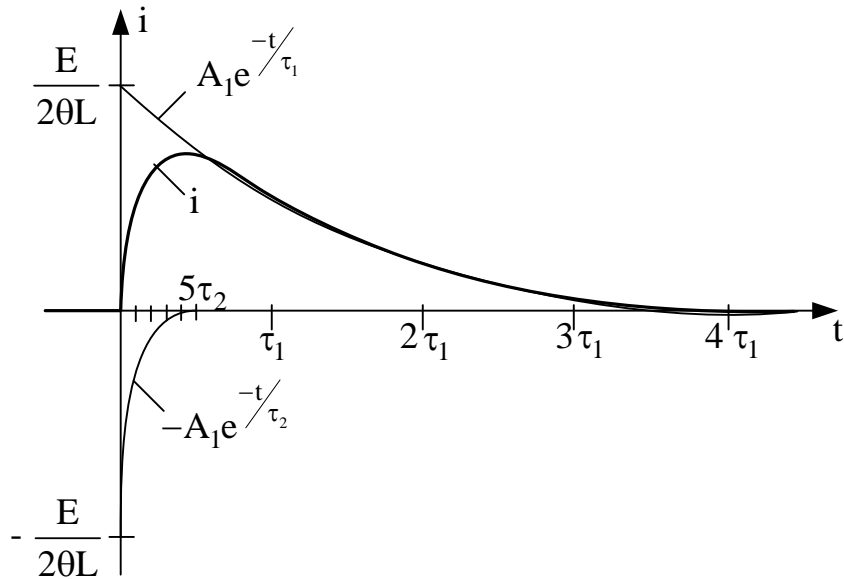


Рисунок 9.30

График напряжения $u_R = Ri$ по своей форме повторяет кривую тока и на экране осциллографа получают кривую u_R , которая в другом масштабе является кривой тока: $u_L(0+) = E$; $u_L = L \frac{di}{dt}$. Когда i растёт, $u_L > 0$; в точке максимума тока $u_L = 0$. Когда i убывает, $u_L < 0$ и $u_L \rightarrow 0$. График u_c строится так, чтобы $u_R + u_L + u_c = E$ в любой момент времени. $u_c(0+) = 0$, $u_{cпр} = E$.

Графики напряжений изображены на рисунке 9.31.

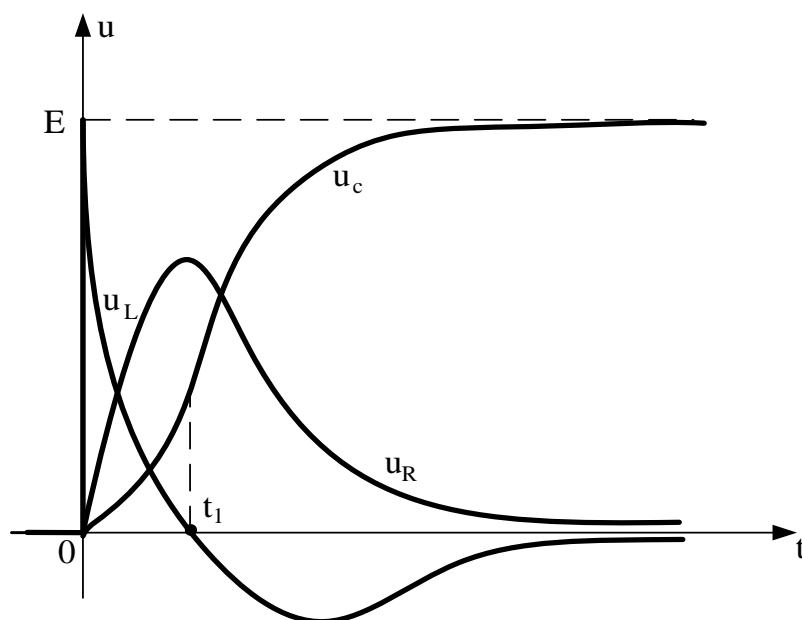


Рисунок 9.31

Такой переходный процесс, при котором знак тока не изменяется, называется аperiodическим. Он возникает при $\delta > \omega_0$. Рассмотрим это условие подробнее.

$$\delta = \frac{R}{2L}; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величина $R_{\text{кр}} = 2\sqrt{L/C}$ называется критическим сопротивлением цепи. Таким образом, при $R > R_{\text{кр}}$ возникает аperiодический переходной процесс в цепи R, L, C .

$$2) \delta = \omega_0; R = R_{\text{кр}}; p_1 = p_2 = -\delta.$$

$$i = i_{\text{св}} = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}; i(0+) = A_1 = 0; i = A_2 t e^{-\delta t}.$$

$$\frac{di}{dt} = A_2 e^{-\delta t} (1 - \delta t); \left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = A_2 = \frac{E}{L}.$$

Таким образом,

$$i = \frac{E}{L} t e^{-\delta t}; \quad (9.45)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = E e^{-\delta t} (1 - \delta t) \quad (9.46)$$

$$u_c = E - (Ri + u_L) = E \left(1 - \frac{R}{L} t e^{-\delta t} - e^{-\delta t} + \delta t e^{-\delta t} \right) = E - E e^{-\delta t} (1 + \delta t), \quad (9.47)$$

так как $\frac{R}{L} = 2\delta$.

Здесь мы имеем предельный случай аperiодического переходного процесса, имеющего наименьшую длительность. Графики тока и напряжений по форме аналогичны полученным выше.

$$3) \delta < \omega_0; R < R_{\text{кр}}; p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_c.$$

$$i = i_{\text{н\grave{a}}} = I_{m\text{н\grave{a}}} e^{-\delta t} \sin(\omega_c t + \psi_{i\text{н\grave{a}}}); i(0+) = I_m e^{-\delta t} \sin \psi_{i\text{н\grave{a}}} = 0, \text{ следовательно, } \psi_{i\text{н\grave{a}}} = 0.$$

$$i = I_{m\hat{a}} e^{-\delta t} \sin \omega_c t; \quad \frac{di}{dt} = I_{m\hat{a}} e^{-\delta t} (-\delta \sin \omega_c t + \omega_c \cos \omega_c t); \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = \omega_c I_{m\text{св}} = \frac{E}{L},$$

откуда $I_{m\hat{a}} = \frac{E}{\omega_c L}.$

$$i = \frac{E}{\omega_c L} e^{-\delta t} \sin \omega_c t. \quad (9.48)$$

Это выражение описывает затухающие колебания с периодом $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$, и весь переходный процесс в этом случае носит колебательный характер. График тока изображен на рис. 9.32.

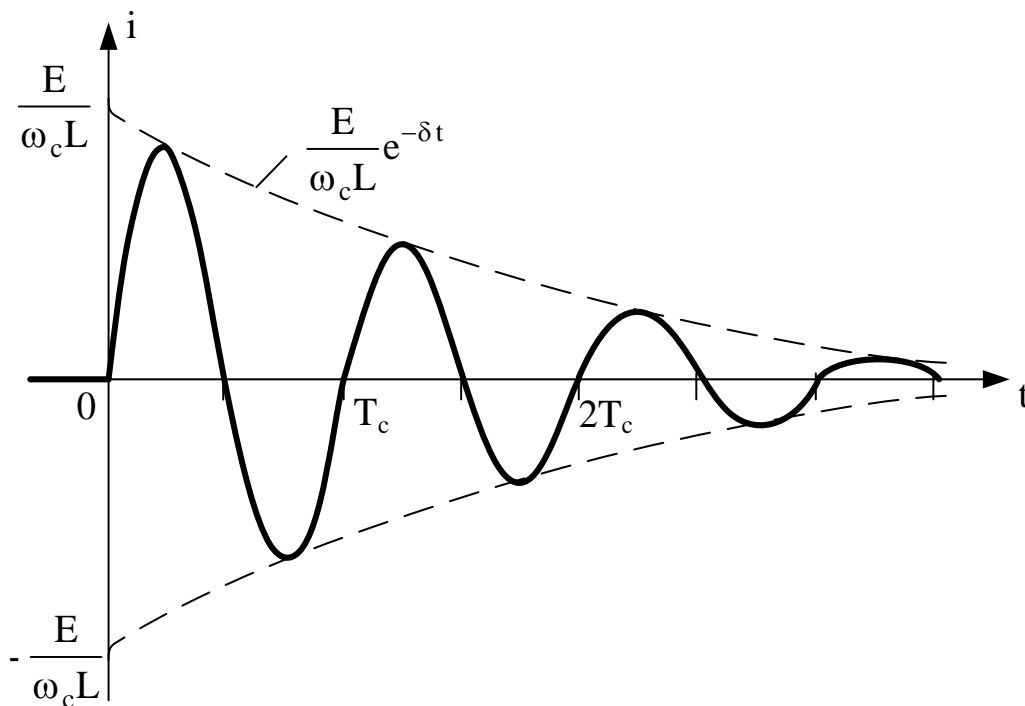


Рисунок 9.32

Длительность переходного процесса равна $t_{\text{п.п.}} = 4,6\tau = \frac{4,6}{\delta}$. Найдём выражения для напряжений:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{\omega_c L} e^{-\delta t} (-\delta \sin \omega_c t + \omega_c \cos \omega_c t) \quad (9.49)$$

Соотношение величин в случае колебательного процесса отражает прямоугольный треугольник, (рис. 9.33), из которого:

$$\sin \beta = \frac{\delta}{\omega_0}; \cos \beta = \frac{\omega_c}{\omega_0}.$$

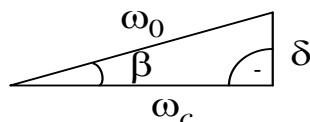


Рисунок 9.33

Умножим и разделим (9.49) на ω_0 и приведем его к более удобному виду:

$$u_L = E \frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\delta t} \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} \cos \omega_c t - \frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_c t \right) = E \frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\delta t} \cos(\omega_c t + \beta) \quad (9.50)$$

$$\begin{aligned} u_c &= E - (Ri + u_L) = E - \frac{E}{\omega_c L} e^{-\delta t} (R \sin \omega_c t + \omega_c L \cos \omega_c t - \delta L \sin \omega_c t) = \\ &= E - E \frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\delta t} \left(\frac{2\delta}{\omega_0} \sin \omega_c t + \frac{\omega_0}{\omega_c} \cos \omega_c t - \frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_c t \right) = \\ &= E - E \frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\delta t} \cos(\omega_c t - \beta). \end{aligned} \quad (9.51)$$

График u_c так же отражает колебательный характер переходного процесса (рис. 9.34).

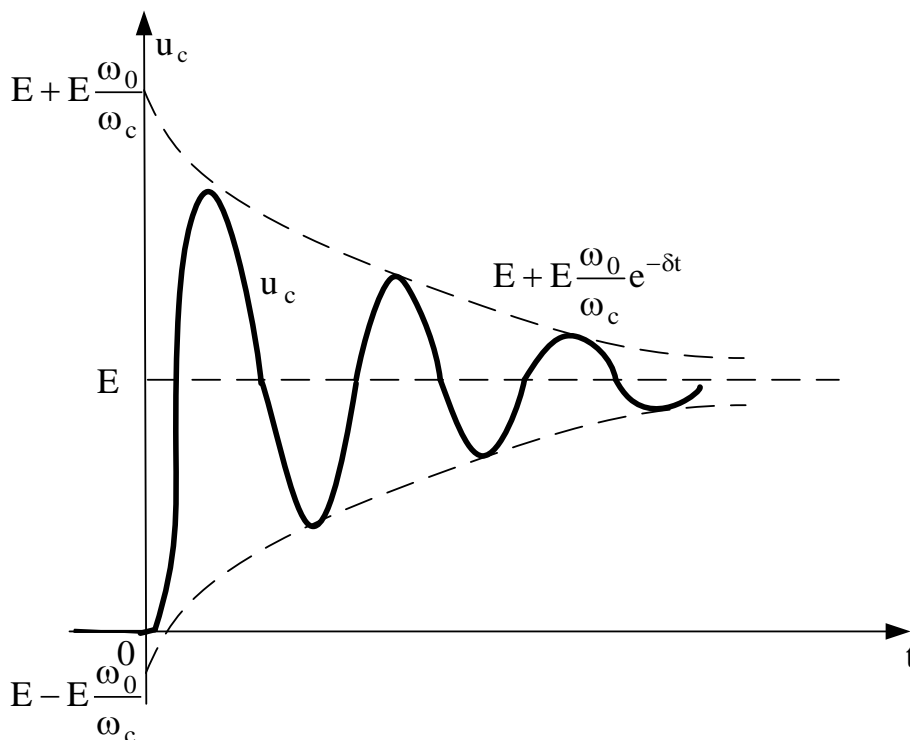


Рисунок 9.34

Расчёт переходных процессов в разветвлённых цепях с двумя накопителями энергии

Можно доказать, что любая сколь угодно сложная цепь с двумя накопителями энергии описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка следующего вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (9.52)$$

решение которого состоит из двух составляющих:

$$x = x_{\text{ид}} + x_{\text{нст}};$$

$$x_{\text{ид}} = \begin{cases} X, & \text{а́ннэ} f(t) = \text{const}; \\ X_m \sin(\omega t + \psi_x), & \text{а́ннэ} f(t) \text{ нэ́í о́нн э́äàëúí ä}; \\ 0, & \text{а́ннэ} f(t) = 0; \end{cases}$$

Запись $x_{\text{св}}$ зависит от корней характеристического уравнения:

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0$$

1) $\delta > \omega_0$ – аperiодический переходный процесс;

$$x_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

2) $\delta = \omega_0$; - предельный случай аperiодического процесса:

$$x_{\text{св}} = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t};$$

3) $\delta < \omega_0$; - колебательный переходный процесс

$$x_{\text{н\acute{a}}} = A_{\text{м\acute{n}д}} e^{-\delta t} \sin(\omega_c t + \alpha_{\text{н\acute{д}}}).$$

В любом случае свободная составляющая содержит две постоянных интегрирования, для определения которых необходимо знать начальные значения самой функции и её первой производной $x(0+)$ и $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{0+}$, которые могут быть найдены из уравнений по законам Кирхгофа для момента $t = 0+$ с использованием законов коммутации.

Для получения характеристического уравнения не обязательно выводить дифференциальное уравнение (9.52). Достаточно записать обобщённое сопротивление цепи после коммутации относительно любой пары зажимов $Z(p)$, считая $Z_L(p) = Lp$ и $Z_C = \frac{1}{Cp}$. Уравнение $Z(p) = 0$ представляет собой характеристическое уравнение цепи.

Пример (рис. 9.35)

$E=120$ В; $L=10$ мГн; $C=10$ мкФ

1) $R=10$ Ом; 2) $R=20$ Ом.

Найти $i(t)$.

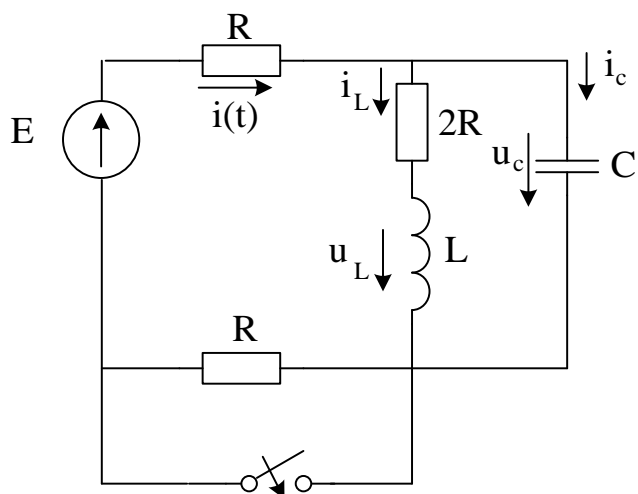


Рисунок 9.35

$$t \leq 0: u_L = 0; i_c = 0; i = i_L = \frac{E}{4R}; u_c = i_L \cdot 2R = \frac{E}{2}.$$

$t = 0+:$

$$\begin{cases} -i + i_L + i_c = 0; \\ Ri + u_c = E; \\ u_c - 2Ri_L - u_L = 0. \end{cases} \quad (9.53), (9.54), (9.55).$$

$$i_L(0+) = \frac{E}{4R}; u_c(0+) = \frac{E}{2}; i(0+) = \frac{E - u_c(0+)}{R} = \frac{E}{2R};$$

$$u_L(0+) = u_c(0+) - 2Ri_L(0+) = \frac{E}{2} - 2R \frac{E}{4R} = 0;$$

$$i_c(0+) = i(0+) - i_L(0+) = \frac{E}{2R} - \frac{E}{4R} = \frac{E}{4R};$$

$$i_c(0+) = C \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{0+}; \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{0+} = \frac{E}{4RC};$$

Дифференцируя (9.54), получим:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{du_c}{dt} = 0; \left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = \frac{-E}{4R^2C}.$$

Итак, $i(0+) = \frac{E}{2R}$ и $\left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = \frac{-E}{4R^2C}$. Это и есть необходимые начальные условия.

$$t > 0. i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}; i_{\text{пр}} = \frac{E}{3R};$$

Найдём характеристическое уравнение цепи. Для этого запишем $z(p)$ после коммутации относительно зажимов источника и приравняем его к нулю (рис. 9.36).

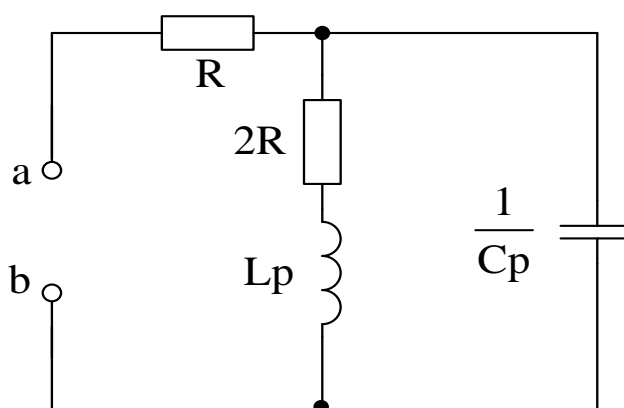


Рисунок 9.36

$$\begin{aligned} z(p) &= R + \frac{(2R + Lp) \frac{1}{Cp}}{2R + Lp + \frac{1}{Cp}} = R + \frac{2R + Lp}{2RCp + LCp^2 + 1} = \\ &= \frac{2R^2Cp + RLCp^2 + R + 2R + Lp}{2RCp + LCp^2 + 1} = 0; \end{aligned}$$

$$RLCp^2 + (L + 2R^2C)p + 3R = 0;$$

$$p^2 + \frac{L + 2R^2C}{RLC}p + \frac{3}{LC} = 0.$$

Обозначим $2\delta = \frac{L + 2R^2C}{RLC}$ и $\omega_0^2 = \frac{3}{LC}$;

Рассмотрим два варианта:

1) $R = 10 \text{ Ом}$; $\delta = \frac{L + 2R^2C}{2RLC} = 6000 \text{ с}^{-1}$, $\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{LC}} = 5477,2 \text{ с}^{-1}$, $i_{\text{np}} = 4 \text{ А}$, $i(0+) = 6 \text{ А}$,

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = -3 \cdot 10^4 \text{ А/с}. \delta > \omega_0. \text{ Аперiodический переходный процесс.}$$

$$\theta = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{6^2 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^7} = 2449,5 (\text{с}^{-1});$$

$$p_1 = -\delta + \theta = -3550,5 (\text{с}^{-1}); \quad p_2 = -8449,5 (\text{с}^{-1});$$

$$i = i_{\text{np}} + i_{\text{св}} = 4 + A_1 e^{-3550,5t} + A_2 e^{-8449,5t};$$

$$\frac{di}{dt} = -3550,5 A_1 e^{-3550,5t} - 8449,5 A_2 e^{-8449,5t}; \quad i(0+) = 4 + A_1 + A_2 = 6; \quad A_1 + A_2 = 2;$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = -3550,5 A_1 - 8449,5 A_2 = -3 \cdot 10^4;$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2; \\ A_1 + 2,38 A_2 = 8,4495; \end{cases}$$

$$-1,38A_2 = -6,4495; \quad A_2 = 4,674; \quad A_1 = -2,674;$$

$$i = 4 - 2,674e^{-3550,5t} + 4,674e^{-8449,5t} \quad (\text{A});$$

$$\tau_1 = \frac{1}{3550,5} = 2,8 \cdot 10^{-4} (\text{с}), \quad \tau_2 = \frac{1}{8449,5} = 1,2 \cdot 10^{-4} (\text{с}).$$

График $i(t)$ представлен на рисунке 9.37.

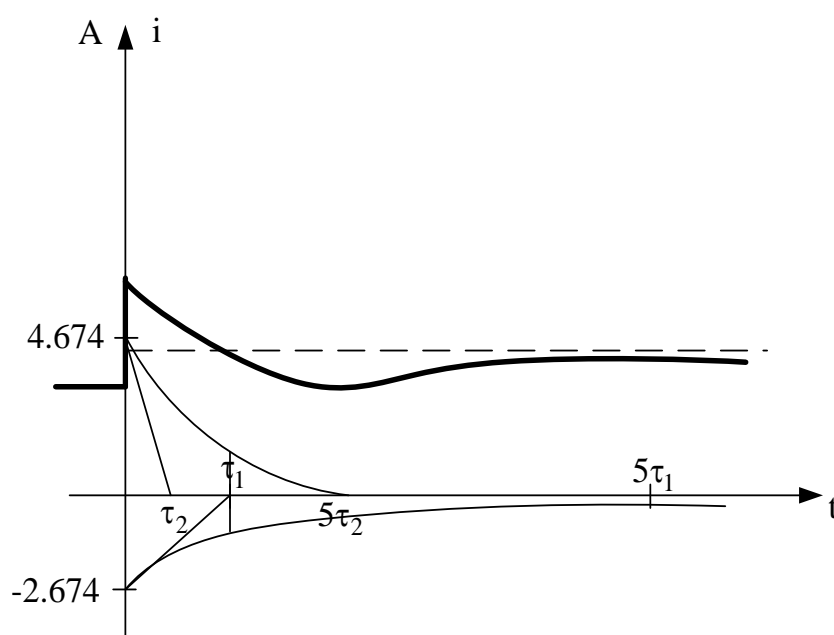


Рисунок 9.37

$$i(0-) = \frac{E}{4R} = 3(\text{A});$$

2) $R=20 \text{ Ом};$

$$i(0-) = \frac{120}{80} = 1,5(\text{A}); \quad i(0+) = \frac{120}{40} = 3(\text{A}); \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = \frac{-120}{4 \cdot 20^2 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = -7500 \left(\frac{\text{A}}{\text{с}} \right);$$

$$i_{\text{np}} = \frac{120}{3 \cdot 20} = 2(\text{A});$$

$$\delta = \frac{10 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 20^2 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 4500 (\text{с}^{-1}); \quad \omega_0 = 5477,2 (\text{с}^{-1});$$

$\delta < \omega_0$ - колебательный переходный процесс.

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{3 \cdot 10^7 - 4,5^2 \cdot 10^6} = 3122,5 (\text{с}^{-1});$$

$$p_{1,2} = (-4500 \pm j3122,5) (\text{с}^{-1});$$

$$i_{\text{св}} = Ae^{-4500t} \sin(3122,5t + \alpha); \quad i_{\text{ип}} = 2 (\text{А});$$

$$i = 2 + Ae^{-4500t} \sin(3122,5t + \alpha); \quad i(0+) = 2 + A \sin \alpha = 3; \quad A \sin \alpha = 1;$$

$$\frac{di}{dt} = Ae^{-4500t} [-4500 \sin(3122,5t + \alpha) + 3122,5 \cos(3122,5t + \alpha)];$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = A(-4500 \sin \alpha + 3122,5 \cos \alpha) = -7500;$$

$$A \sin \alpha - 0,6939 A \cos \alpha = 1,6667;$$

$$A \cos \alpha = \frac{0,6667}{-0,6939} = -0,961;$$

$$A = \sqrt{(A \sin \alpha)^2 + (A \cos \alpha)^2} = 1,387 (\text{А});$$

$$\alpha = \arctg \frac{A \sin \alpha}{A \cos \alpha} = \arctg \left(\frac{1}{0,961} \right) = 133,8^\circ.$$

Угол α лежит во второй четверти, так как $\sin \alpha > 0$, а $\cos \alpha < 0$.

$$i = [2 + 1,387e^{-4500t} \sin(3122,5t + 133,8^\circ)] \text{ (A)};$$

$$T_c = \frac{2\pi}{3122,5} = 2,01 \cdot 10^{-3} \text{ (с)}; \quad \tau = \frac{1}{4500} = 2,22 \cdot 10^{-4} \text{ (с)};$$

$$t_{\text{нп}} \approx 5\tau = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ с} \approx \frac{T_c}{2}.$$

График $i(t)$ представлен на рис. 9.38.

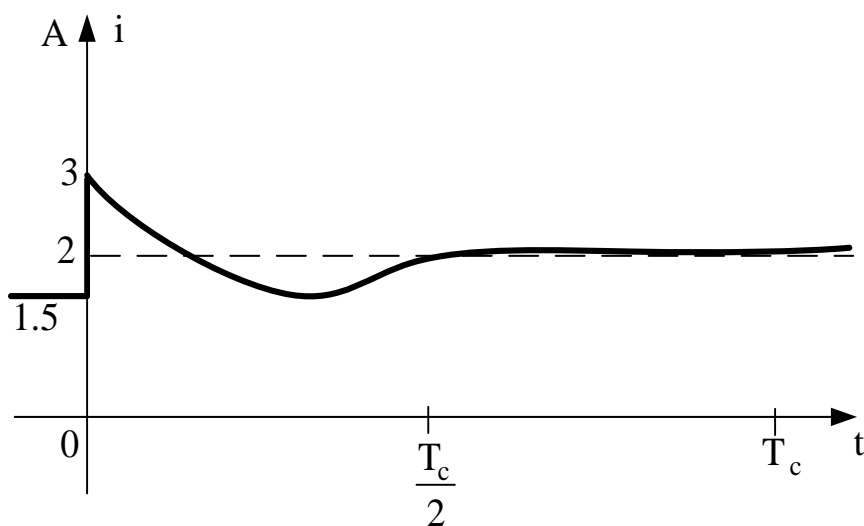


Рисунок 9.38

Поскольку $T_c \gg \tau$, на графике видно только полпериода колебаний.

$$i(-0) = \frac{E}{4R} = 1,5 \text{ (A)}.$$

9.7. Операторный метод расчёта переходных процессов

Рассматривая классический метод расчёта переходных процессов, мы имели возможность убедиться в том, что этот метод обладает такими несомненными

достоинствами, как простота математического аппарата и физическая наглядность. Однако большим недостатком классического метода является сложность определения постоянных интегрирования.

Этого недостатка не имеет операторный метод расчёта переходных процессов, в котором ненулевые начальные условия непосредственно вводятся в решение. Кроме того, в операторном методе интегрально-дифференциальные уравнения цепи для вещественного переменного t заменяются алгебраическими уравнениями относительно комплексного переменного p , которые решаются проще, чем дифференциальные уравнения.

В основе операторного метода лежит преобразование Лапласа. Изображением $F(p)$ функции $f(t)$ называется следующая функция:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (9.56)$$

где $p = c + j\omega$ - комплексное переменное.

Для того чтобы функция $f(t)$ позволяла производить преобразование Лапласа, она должна удовлетворять условиям Дирихле, т.е. иметь за конечный промежуток времени конечное число максимумов и минимумов и конечное число разрывов I рода. Кроме того, $f(t)$ должна расти ограниченно, т.е.

$$|f(t)| < Ae^{\alpha t},$$

где A и α – некоторые положительные числа.

Все функции времени, с которыми мы имеем дело на практике, этим условиям удовлетворяют.

Функция $f(t)$ называется оригиналом. Краткая запись:

$$f(t) \Rightarrow F(p); \quad \Rightarrow - \text{знак соответствия.}$$

Преобразование Лапласа обладает свойством линейности:

$$\sum_{k=1}^n A_k f_k(t) \Rightarrow \sum_{k=1}^n A_k F_k(p).$$

Линейной комбинации оригиналов соответствует линейная комбинация изображений.

Изображения простейших функций

$$1) f(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases} - \text{единичная функция.}$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = 1 \cdot \left(-\frac{1}{p}\right) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}; \quad 1 \Rightarrow \frac{1}{p}.$$

Используя свойство линейности, можно найти изображение постоянной величины:

$$A \Rightarrow \frac{A}{p}; \quad E \Rightarrow \frac{E}{p}; \quad I \Rightarrow \frac{I}{p}, \text{ и т.д.}$$

$$2) \text{ Экспонента } f(t) = e^{-\alpha t}.$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} dt = -\frac{1}{p+\alpha} e^{-(p+\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p+\alpha}; \quad e^{-\alpha t} \Rightarrow \frac{1}{p+\alpha};$$

$$\text{Следовательно, } \sum_{k=1}^n A_k e^{-\alpha_k t} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p + \alpha_k}.$$

$$3) f(t) = 1 - e^{-\alpha t}. \text{ Используем свойство линейности}$$

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \alpha} = \frac{\alpha}{p(p + \alpha)}; 1 - e^{-\alpha t} \Rightarrow \frac{\alpha}{p(p + \alpha)}.$$

$$4) f(t) = \sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}).$$

$$F(p) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{p + j\omega - p + j\omega}{2j(p - j\omega)(p + j\omega)} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \sin \omega t \Rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

$$5) f(t) = \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}).$$

$$F(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}; \cos \omega t \Rightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

$$6) f(t) = \sin(\omega t + \psi) = \sin \omega t \cdot \cos \psi + \cos \omega t \cdot \sin \psi.$$

$$F(p) = \frac{\omega \cos \psi + p \sin \psi}{p^2 + \omega^2}.$$

Теорема дифференцирования

Найдём изображение производной $\frac{df(t)}{dt} = f'(t)$ функции $f(t)$, имеющей изображение $F(p)$.

Используем приём интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \left. \begin{array}{l} u = e^{-pt} \\ dv = f'(t) dt \\ du = -p e^{-pt} dt \\ v = f(t) \end{array} \right| = \\ &= f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-p) e^{-pt} f(t) dt = -f(0) + pF(p). \end{aligned}$$

$$f'(t) \Rightarrow pF(p) - f(0). \quad (9.57)$$

Операция дифференцирования оригинала соответствует умножению изображения на p .

Теорема интегрирования

Найдём изображение определённого интеграла: $\int_0^t f(t)dt$, если $f(t) \Rightarrow F(p)$.

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)dt \right] e^{-pt} dt = \left. \begin{aligned} u &= \int_0^t f(t)dt \\ du &= f(t)dt \\ dv &= e^{-pt} dt \\ v &= -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{aligned} \right| = \\ &= \left[\int_0^t f(t)dt \right] \cdot \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right) \Bigg|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \frac{F(p)}{p}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое при подстановке пределов обращается в 0, т.к. при $t = \infty e^{-pt} = 0$, при $t = 0 \int_0^0 f(t)dt = 0$. Итак,

$$\int_0^t f(t)dt \Rightarrow \frac{F(p)}{p}. \quad (9.58)$$

Операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p .

Закон Ома в операторной форме

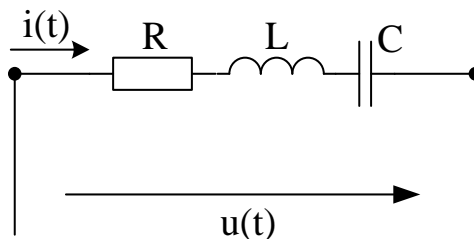


Рисунок 9.39

Элементарная цепь, изображенная на рис. 9.39, описывается уравнением:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = u(t).$$

Пусть $i(t) \Rightarrow I(p)$; $u(t) \Rightarrow U(p)$. Представим $u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t idt = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t idt$.

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_c(0) = u(t).$$

Найдём изображения всех слагаемых, используя свойство линейности и теоремы дифференцирования и интегрирования.

$$Ri \Rightarrow RI(p); L \frac{di}{dt} \Rightarrow LpI(p) - Li(0); \frac{1}{C} \int_0^t idt \Rightarrow \frac{I(p)}{Cp}; u_c(0) \Rightarrow \frac{u_c(0)}{p}.$$

Таким образом,

$$RI(p) + LpI(p) - Li(0) + \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_c(0)}{p} = U(p);$$

$$I(p) \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) = U(p) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p};$$

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p}}{R + Lp + \frac{1}{Cp}}. \quad (9.59)$$

Это и есть закон Ома в операторной форме при ненулевых начальных условиях. Дополнительные операторные ЭДС $Li(0)$ и $\frac{u_c(0)}{p}$ учитывают запасы энергии магнитного и электрического полей в момент коммутации.

Обозначим $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ и назовем эту величину операторным сопротивлением цепи. При нулевых начальных условиях $i(0) = 0$ и $u_c(0) = 0$ закон Ома запишется следующим образом:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}. \quad (9.59 \text{ а})$$

Это наиболее общая форма записи закона Ома, из которой можно получить все ранее известные формы. Так, при $p = j\omega$ получим закон Ома в комплексной форме, а при $p=0$ – закон Ома для цепи постоянного тока.

Законы Кирхгофа в операторной форме.

Первый закон Кирхгофа

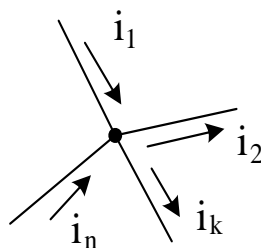


Рисунок 9.40

Узел электрической цепи изображен на рис. 9.40.

Для мгновенных значений $\sum_{k=1}^n i_k = 0$. Используя свойство линейности, запишем:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0. \quad (9.60)$$

В узле электрической цепи алгебраическая сумма изображений токов равна нулю. Это и есть первый закон Кирхгофа в операторной форме. Правило знаков остаётся тем же, что и в цепях постоянного тока.

Второй закон Кирхгофа

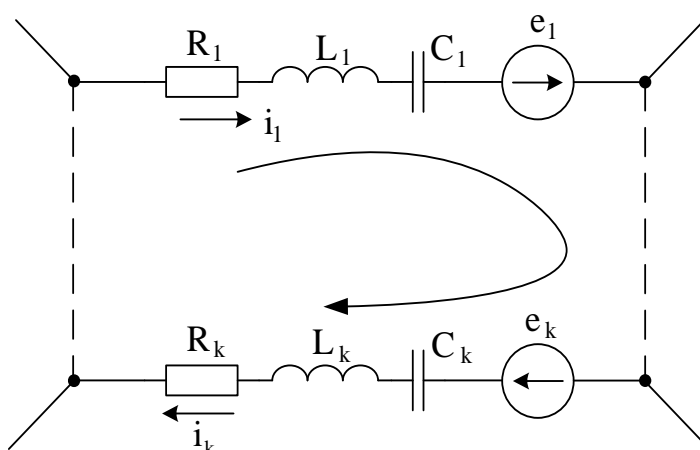


Рисунок 9.41

Рассмотрим контур, изображенный на рис. 9.41. Для мгновенных значений запишем:

$$\sum_{k=1}^n \left(R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right) = \sum_{k=1}^n e_k.$$

Представим

$$\frac{1}{C_k} \int i_k dt = \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k dt + u_{ck}(0).$$

Переходя к изображению, получим:

$$\sum_{k=1}^n \left(R_k + L_k p + \frac{1}{C_k p} \right) I_k(p) = \sum_{k=1}^n \left[E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{ck}(0)}{p} \right]. \quad (9.61)$$

Это второй закон Кирхгофа в операторной форме.

В контуре алгебраическая сумма операторных падений напряжений равна алгебраической сумме операторных ЭДС, включая дополнительные ЭДС., учитывающие ненулевые начальные условия.

Таким образом, поскольку в операторной форме применимы законы Ома и Кирхгофа, а все известные методы расчёта простых и сложных цепей основаны именно на этих законах, то в операторной форме для определения изображений искомых функций можно применять все методы расчёта цепей (методы контурных токов и узловых потенциалов, принципы наложения и взаимности, теорему об эквивалентном генераторе и т.д.).

Для применения всех этих методов нужно, прежде всего, уметь правильно составить расчетную операторную схему.

Методика составления операторных схем

Схема изображается после коммутации. В ней $i_L(0)$ и $u_C(0)$ – значения i_L и u_C в последний момент перед коммутацией, т.е. $i_L(-0)$ и $u_C(-0)$.

Из операторной схемы одним из методов расчёта цепей определяют изображение искомой функции.

Правила составления операторных расчетных схем объединены на рис. 9.42.

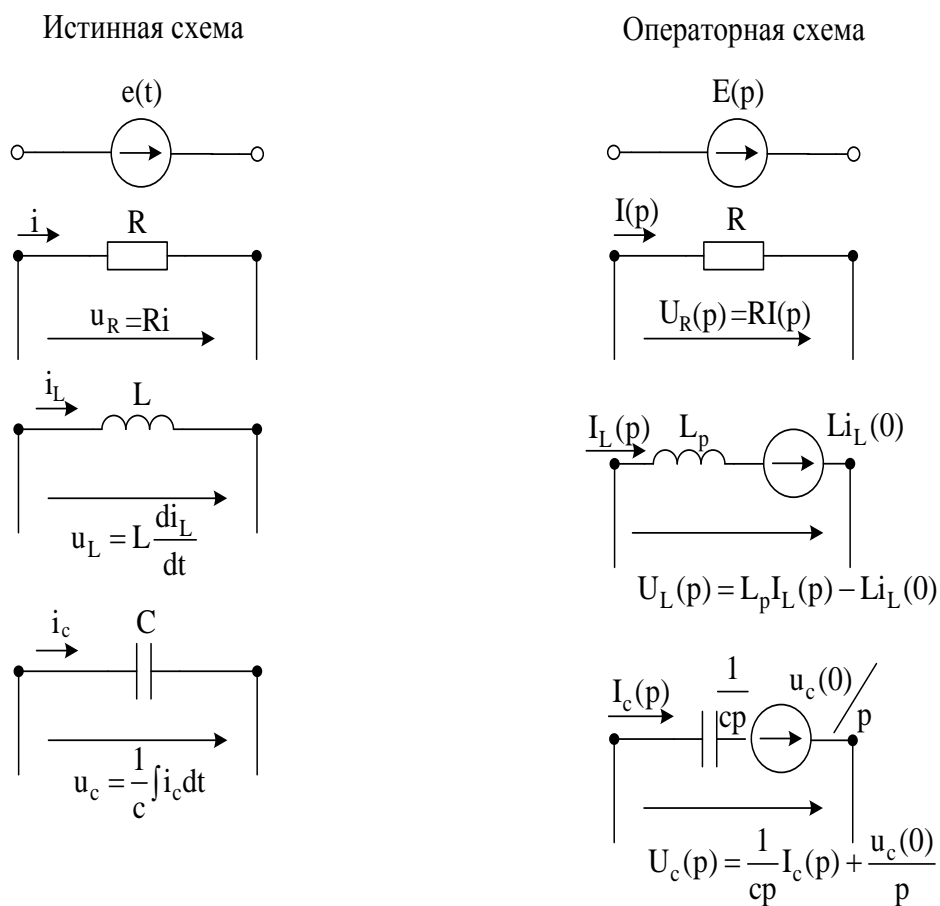


Рисунок 9.42

Пример определения изображения (рис.9.43)

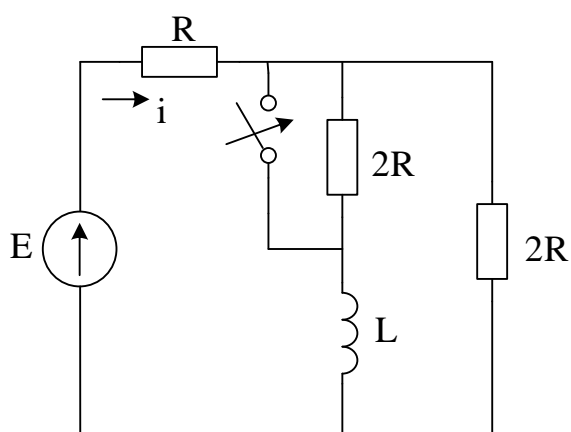


Рисунок 9.43

Искомой функцией будем считать $i(t)$. Из режима до коммутации (при $t < 0$) найдём, учитывая, что при постоянном токе $u_L = 0$:

$$R_{\text{общ}} = R + \frac{2R \cdot 2R}{4R} = 2R; i = \frac{E}{2R}; i_L = \frac{1}{2}i = \frac{E}{4R}; i_L(0) = \frac{E}{4R}.$$

Составляем после коммутации операторную схему (рис. 9.44) и находим изображение искомой величины $I(p)$ с помощью принципа наложения.

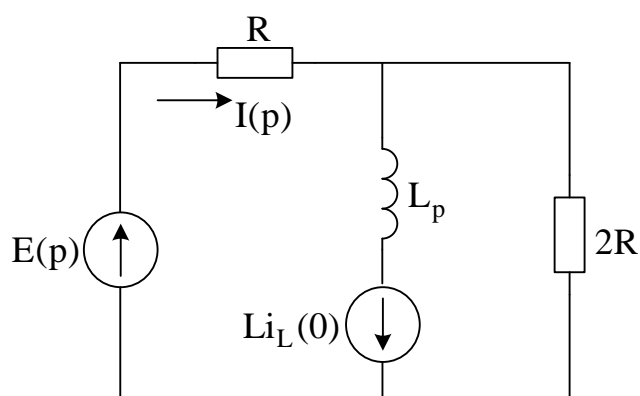


Рисунок 9.44

$$\begin{aligned} I(p) = I'(p) + I''(p) &= \frac{E(p)}{R + \frac{Lp \cdot 2R}{Lp + 2R}} + \frac{Li_L(0)}{Lp + \frac{R \cdot 2R}{3R}} \cdot \frac{2R}{3R} = \\ &= \frac{E(Lp + 2R)}{p(RLp + 2R^2 + 2RLp)} + \frac{L \frac{E}{4R} \cdot 2R}{3RLp + 2R^2} = \\ &= \frac{E(Lp + 2R)}{pR(3Lp + 2R)} + \frac{LE}{2R(3Lp + 2R)} = \frac{E(3Lp + 4R)}{2Rp(3Lp + 2R)}. \end{aligned} \quad (9.62)$$

После нахождения изображения осуществляется переход к оригиналу.

Методы перехода от изображения к оригиналу

1) Обратное преобразование Лапласа.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp.$$

Практически оно не используется.

2) Использование формул соответствия, т.е. приведения изображений к табличному виду и запись соответствующих оригиналов.

Например, в предыдущем примере преобразуем выражение (9.62):

$$I(p) = \frac{E(3Lp + 2R + 2R)}{2Rp(3Lp + 2R)} = \frac{E}{2Rp} + \frac{E \cdot 2R}{2Rp \cdot 3L(p + \frac{2R}{3L})} = \frac{E}{2R} \cdot \frac{1}{p} + \frac{E}{2R} \cdot \frac{\alpha}{p(p + \alpha)},$$

$$\text{где } \alpha = \frac{2R}{3L}.$$

Используя формулы соответствия 1 и 3 для изображения простейших функций, запишем:

$$i(t) = \frac{E}{2R} + \frac{E}{2R} \left(1 - e^{-\frac{2R}{3L}t} \right) = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R} e^{-\frac{2R}{3L}t}.$$

3) Использование теоремы разложения

Пусть изображение искомой функции получено в виде рациональной правильной дроби:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{C_0 p^m + C_1 p^{m-1} + \dots + C_{m-1} p + C_m}{p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad (9.63)$$

причём $m \leq n$.

Если бы мы могли разложить эту дробь на элементарные дроби, то каждая из них была бы табличным изображением, от которого легко перейти к оригиналу.

Для разложения $F(p)$ на элементарные дроби найдём корни знаменателя $F_2(p)$, считая, что среди них нет кратных корней.

Уравнение $F_2(p) = p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n = 0$ даст n значений корней: $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n$.

$$F_2(p) = (p - p_1) \cdot (p - p_2) \dots (p - p_k) \dots (p - p_n).$$

Тогда

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_k}{p - p_k} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{k=1}^n A_k \cdot \frac{1}{p - p_k}. \quad (9.64)$$

Если будут известны A_k , то оригинал выражения (6.64) запишется следующим образом:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cdot e^{p_k t}.$$

Чтобы определить A_k , умножим обе части (6.64) на $p - p_k$ и перейдём к пределу при $p \rightarrow p_k$.

$$\frac{A_1(p - p_k)}{p - p_1} + \frac{A_2(p - p_k)}{p_1 - p_2} + \dots + A_k + \dots + \frac{A_n(p - p_k)}{p - p_n} = \frac{F_1(p)(p - p_k)}{F_2(p)}. \quad (9.65)$$

Правая часть (9.65) при $p \rightarrow p_k$ представляет собой неопределённость вида $\frac{0}{0}$, которая раскрывается по правилу Лопиталья, а левая часть равна A_k :

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{F_1(p)(p - p_k)}{F_2(p)} = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{F_1'(p)(p - p_k) + F_1(p) \cdot 1}{F_2'(p)} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}.$$

Таким образом,

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}, \quad (9.66)$$

причём число слагаемых в (9.66) равно числу корней знаменателя $F_2(p)$, т.е. степени n знаменателя. От (9.66) переходим к оригиналу:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t} \quad (9.67)$$

Это и есть теорема разложения. Используем её для перехода к оригиналу в рассмотренном выше примере (9.62):

$$I(p) = \frac{E(3Lp + 4R)}{2Rp(3Lp + 2R)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)};$$

$$F_2(p) = 2Rp(3Lp + 2R) = 0; p_1 = 0; p_2 = -\frac{2R}{3L};$$

$$F_1(p_1) = E \cdot 4R; F_1(p_2) = E(-2R + 4R) = E \cdot 2R;$$

$$F_2'(p) = 2R(3Lp + 2R) + 2Rp \cdot 3L = 12RLp + 4R^2;$$

$$F_2'(p_1) = 4R^2; F_2'(p_2) = 12RL \cdot \left(-\frac{2R}{3L}\right) + 4R^2 = -4R^2;$$

$$i(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} \cdot e^{p_2 t} = \frac{E \cdot 4R}{4R^2} e^{0t} + \frac{E \cdot 2R}{-4R^2} e^{-\frac{2R}{3L}t} = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R} e^{-\frac{2R}{3L}t}.$$

Этот результат совпадает с полученным ранее классическим методом.

Некоторые замечания по применению операторного метода

1) Если $F_2(p)$ имеет корень $p_0 = 0$, то искомая величина имеет принуждённую постоянную составляющую.

2) Если $F_2(p)$ имеет корни $p_{1,2} = \pm j\omega$, то искомая величина имеет синусоидальную принуждённую составляющую.

3) Если среди корней знаменателя $F_2(p)$ имеются два комплексно-сопряжённых корня, то соответствующие им A_k и слагаемые в $f(t)$ также будут комплексно сопряжёнными. При их сложении мнимые их части компенсируются, а вещественные части будут одинаковые и удвоятся.

Например, $F_2(p) = p(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2)$, причём $\delta < \omega_0$. Тогда $p_1 = 0$; $p_{2,3} = -\delta \pm j\omega_c$, где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Оригинал запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{F_1(0)}{F_2(0)} e^{0t} + 2 \left[\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} \right]_{re} = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + 2 \left[\frac{M e^{j\alpha}}{N e^{j\beta}} e^{(-\delta + j\omega_c)t} \right] = \\ &= \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \frac{2M}{N} e^{-\delta t} \cos(\omega_c t + \alpha - \beta) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \frac{2M}{N} e^{-\delta t} \sin(\omega_c t + \alpha - \beta + 90^\circ) = \\ &= f_{\text{св}} + F_{\text{мн}} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_c t + \psi_{\text{н}}). \end{aligned}$$

Переходный процесс в этом случае носит колебательный характер.

4) Элементы операторного метода используются и при решении задачи классическим методом. Так, для нахождения характеристического уравнения без вывода дифференциального уравнения достаточно записать операторное сопротивление цепи после коммутации относительно любой пары зажимов и прирав-

нять его к нулю для определения корней. Например, в рассмотренной ранее схеме (рис. 9.43)

$$Z_{\text{ао}}(p) = R + \frac{pL \cdot 2R}{pL + 2R} = \frac{RpL + 2R^2 + 2RpL}{pL + 2R} = 0.$$

Характеристическое уравнение цепи $3RpL + 2R^2 = 0$, а его корень

$$p_1 = -\frac{2R}{3L}.$$

Пример.

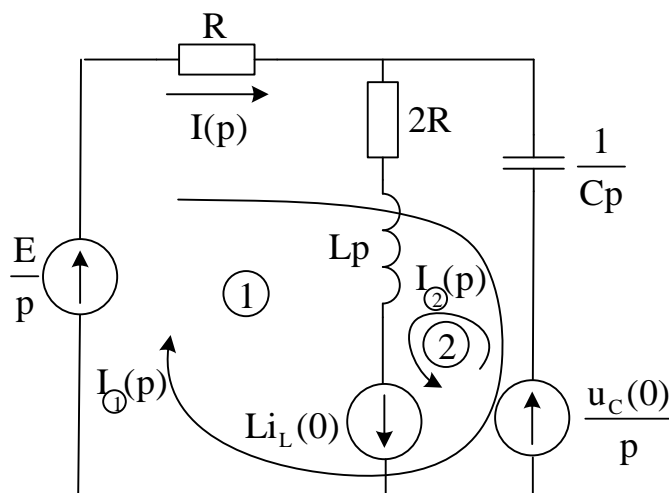
В заключение раздела «Операторный метод расчета переходных процессов» рассмотрим задачу расчета переходного процесса в цепи с двумя накопителями энергии, которая ранее была решена классическим методом. Здесь наглядно будут показаны преимущества операторного метода: начальные условия вводятся в расчетную схему и отпадает необходимость определения постоянных интегрирования; для определения искомой величины применимы все методы расчета линейных цепей.

Рассчитаем переходный процесс в схеме, изображенной на рисунке 9.35, операторным методом при тех же данных и тех же начальных условиях:

$$i_L(0) = \frac{E}{4R}; \quad u_C(0) = \frac{E}{2}.$$

Здесь учтено, что индуктивность не оказывает сопротивления постоянному току, а конденсатор не пропускает постоянного тока.

Для режима после коммутации ($t > 0$) составляем расчетную операторную схему (рис. 9.45).



Для определения $I(p)$ применим метод контурных токов, для чего вводим два неизвестных контурных тока и составляем систему уравнений второго порядка.

$$\begin{cases} I_{\oplus}(p)Z_{11}(p) + I_{\ominus}(p)Z_{12}(p) = E_{\oplus}(p) \\ I_{\oplus}(p)Z_{21}(p) + I_{\ominus}(p)Z_{22}(p) = E_{\ominus}(p) \end{cases}$$

$$\text{Здесь } Z_{11}(p) = R + \frac{1}{Cp}; \quad Z_{22}(p) = 2R + Lp + \frac{1}{Cp}; \quad Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = -\frac{1}{Cp};$$

$$E_{\oplus}(p) = \frac{E}{p} - \frac{E}{2p} = \frac{E}{2p}; \quad E_{\ominus}(p) = \frac{E}{2p} + \frac{LE}{4R} = \frac{E(2R + Lp)}{4Rp}$$

Достаточно найти только один контурный ток:

$$I_{\oplus}(p) = I(p)$$

Главный определитель системы:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} Z_{11}(p) & Z_{12}(p) \\ Z_{21}(p) & Z_{22}(p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R + \frac{1}{Cp} & -\frac{1}{Cp} \\ -\frac{1}{Cp} & 2R + Lp + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix} = \left(R + \frac{1}{Cp}\right)\left(2R + Lp + \frac{1}{Cp}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{Cp}\right)^2 = 2R^2 + R Lp + \frac{R}{Cp} + \frac{2R}{Cp} + \frac{Lp}{Cp} + \frac{1}{C^2 p^2} - \frac{1}{C^2 p^2} =$$

$$= \frac{RLCp^2 + 2R^2Cp + Lp + 3R}{Cp};$$

$$\Delta_{\oplus}(p) = \begin{vmatrix} \frac{E}{2p} & -\frac{1}{Cp} \\ \frac{E(2R + Lp)}{4Rp} & 2R + Lp + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix} = \frac{E}{2p}\left(2R + Lp + \frac{1}{Cp}\right) + \frac{E(2R + Lp)}{4Rp} \cdot \frac{1}{Cp} =$$

$$= \frac{E}{2p} \frac{4R^2Cp + 2RLCp^2 + 2R + 2R + Lp}{2RCp} = \frac{E(2RLCp^2 + 4R^2Cp + Lp + 4R)}{4RCp^2}.$$

$$I(p) = I_{\oplus}(p) = \frac{\Delta_{\ominus}(p)}{\Delta(p)} = \frac{E(2RLCp^2 + 4R^2Cp + Lp + 4R)Cp}{4RCp^2(RLCp^2 + 2R^2Cp + Lp + 3R)} =$$

$$= \frac{E \cdot 2RLC \left(p^2 + \frac{4R^2C + L}{2RLC} p + \frac{2}{LC} \right)}{4Rp \cdot RLC \left(p^2 + \frac{2R^2C + L}{RLC} p + \frac{3}{LC} \right)} = \frac{E \cdot \left(p^2 + \frac{4R^2C + L}{2RLC} p + \frac{2}{LC} \right)}{2Rp \cdot \left(p^2 + \frac{2R^2C + L}{RLC} p + \frac{3}{LC} \right)}.$$

Рассмотрим два варианта параметров.

1. R=10 Ом

$$I(p) = \frac{6(p^2 + 7000p + 2 \cdot 10^7)}{p(p^2 + 12000p + 3 \cdot 10^7)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Для перехода к оригиналу применим теорему разложения, для чего найдем корни знаменателя: $F_2(p) = p(p^2 + 12000p + 3 \cdot 10^7) = 0$.

$$p_1 = 0; \quad p_{2,3} = -6 \cdot 10^3 \pm \sqrt{36 \cdot 10^6 - 30 \cdot 10^6} = (-6 \pm 2,4495) \cdot 10^3.$$

$$p_2 = -3550,5; \quad p_3 = -8449,5$$

Корни характеристического уравнения $p_{2,3}$ отрицательные, вещественные, различные.

Переходный процесс носит аperiодический характер.

$$\text{По теореме разложения } f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

$$F_1(p) = 6(p^2 + 7000p + 2 \cdot 10^7).$$

$$F_1(p_1) = 12 \cdot 10^7; \quad F_1(p_2) = 6[(-3550,5)^2 + 7000 \cdot (-3550,5) + 2 \cdot 10^7] =$$

$$= 4,652 \cdot 10^7;$$

$$F_1(p_3) = 6[(-8449,5)^2 + 7000 \cdot (-8449,5) + 2 \cdot 10^7] = 193,48 \cdot 10^6.$$

$$F_2'(p) = (p^2 + 12000p + 3 \cdot 10^7) + p(2p + 12000).$$

$$F_2'(p_1) = 3 \cdot 10^7; \quad F_2'(p_2) = 0 + (-3550,5)(-2 \cdot 3550,5 + 12000) = -17,39 \cdot 10^6;$$

$$F_2'(p_3) = 0 + (-8449,5)(-2 \cdot 8449,5 + 12000) = 41,39 \cdot 10^6.$$

$$i(t) = \frac{F_1(p_1)}{F'_2(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F'_2(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{F_1(p_3)}{F'_2(p_3)} e^{p_3 t} = \frac{12 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^7} e^{0t} +$$

$$+ \frac{46,52 \cdot 10^6}{-17,39 \cdot 10^6} e^{-3550,5t} + \frac{193,48 \cdot 10^6}{41,39 \cdot 10^6} e^{-8449,5t} = 4 - 2,674e^{-3550,5t} + 4,674e^{-8449,5t}.$$

2. R=20 Ом.

$$I(p) = \frac{3(p^2 + 6500p + 2 \cdot 10^7)}{p(p^2 + 9000p + 3 \cdot 10^7)}.$$

Корни знаменателя: $p(p^2 + 9000p + 3 \cdot 10^7) = 0$.

$$p_1 = 0. \quad p_{2,3} = -4500 \pm \sqrt{4500^2 - 3 \cdot 10^7} = -4500 \pm \sqrt{-975 \cdot 10^4} = -4500 \pm$$

$$\pm j3122,5 = 5477,2e^{\pm j145,2^\circ}.$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные, переходный процесс носит колебательный характер.

Чтобы упростить дальнейшие расчеты, преобразуем $I(p)$ следующим образом:

$$I(p) = \frac{3(p^2 + 6500p + 2 \cdot 10^7 + 2500p + 1 \cdot 10^7 - 2500p - 1 \cdot 10^7)}{p(p^2 + 9000p + 3 \cdot 10^7)} = \frac{3}{p} -$$

$$- \frac{3(2500p + 10^7)}{p(p^2 + 9000p + 3 \cdot 10^7)}.$$

Обозначим: $I'(p) = \frac{3}{p}$; $i'(t) = 3 \text{ A}$.

$$I''(p) = -\frac{3(2500p + 10^7)}{p(p^2 + 9000p + 3 \cdot 10^7)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

$$F_1(p_1) = -3 \cdot 10^7; \quad F_1(p_2) = -3 \cdot [2500(-4500 + j3122,5) + 10^7] = -3 \cdot 10^6(-11,25 +$$

$$+ j7,806 + 10) = -3 \cdot 10^6 \cdot 7,906e^{j99,1^\circ} = 23,718 \cdot 10^6 e^{j279,1^\circ}$$

$$F_2'(p) = (p^2 + 9000p + 3 \cdot 10^7) + p(2p + 9000).$$

$$F_2'(p_1) = 3 \cdot 10^7; \quad F_2'(p_2) = 0 + 5477,2e^{j145,2^\circ} \cdot (-9000 + j6245 + 9000) =$$

$$= 34,2 \cdot 10^6 e^{j235,2^\circ}.$$

$$i''(t) = \frac{-3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^7} e^{0t} + 2 \left[\frac{23,718 \cdot 10^6 e^{j279,1^\circ}}{34,2 \cdot 10^6 e^{j235,2^\circ}} \cdot e^{(-4500 + j3122,5)t} \right]_{re} = -1 + 1,387 e^{-4500t} \cdot$$

$$\cdot \sin(3122,5t + 43,9^\circ) = -1 + 1,387 e^{-4500t} \cdot \sin(3122,5t + 133,9^\circ).$$

$$i(t) = i'(t) = i''(t) = 2 + 1,387 e^{-4500t} \cdot \sin(3122,5t + 133,9^\circ) \text{ А.}$$

Результаты, полученные операторным методом, полностью совпадают с найденными ранее классическим методом.

В то же время, налицо и недостаток операторного метода – необходимость громоздких математических выкладок.

9.8 Временной метод расчета переходных процессов

Этот метод получил свое название потому, что и входная, и выходная величина записываются как функции времени без перехода к изображениям (рис. 9.46), для чего используются временные характеристики цепей. Временные характеристики бывают двух типов – переходные и импульсные характеристики. Рассмотрим этот метод кратко и только с использованием переходных характеристик.



$x(t)$ – сигнал, $y(t)$ – отклик

Рисунок 9.46

Переходные характеристики типовых звеньев

Переходной характеристикой цепи $H(t)$ называют отклик цепи на единичный скачок входной величины (рис. 9.47).

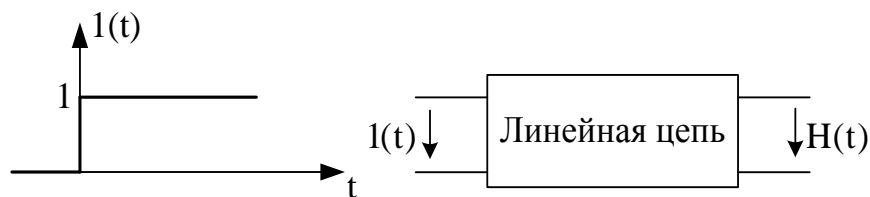


Рисунок 9.47

Если на входе будет запаздывающая единичная функция, то и отклик будет запаздывать (рис.9.48).

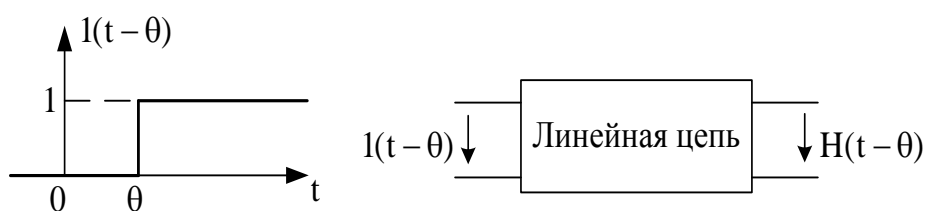


Рисунок 9.48

Обозначим входной сигнал $x(t)$, а выходной – $y(t)$. Если эти сигналы имеют одинаковую размерность, то $H(t)$ – безразмерная величина. Пусть $x(t) = u_1(t) = 1(t)$. Тогда $y(t) = u_2(t) = H(t)$. Найдем переходные характеристики простейших звеньев:

- 1) реальных дифференцирующих звеньев;
- 2) инерционных звеньев.

Реальные дифференцирующие звенья (рис.9.49)

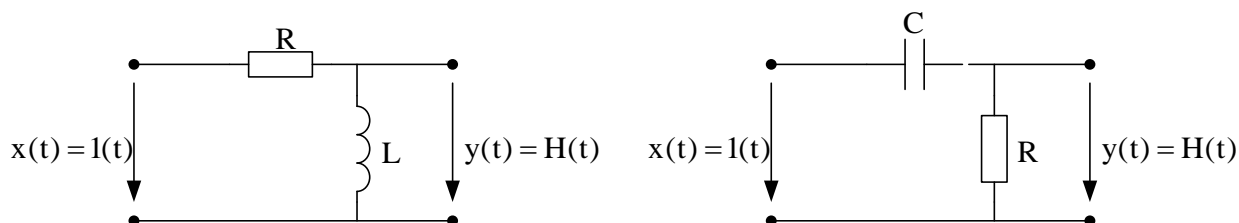


Рисунок 9.49

Покажем, что эти две схемы имеют одинаковую переходную характеристику

$$i = i_{\text{ст}} + i_{\text{н}} = \frac{1}{R} + Ae^{-t/\tau}; \tau = \frac{L}{R};$$

$$u_c = u_{c\text{ст}} + u_{c\text{н}} = 1 + Ae^{-t/\tau};$$

$$i(0+) = i(0-) = 0; A = -\frac{1}{R};$$

$$u_c(0+) = u_c(0-) = 0; A = -1;$$

$$i = \frac{1}{R}(1 - e^{-t/\tau});$$

$$u_c = 1 - e^{-t/\tau}; \tau = RC;$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau};$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{C}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{1}{R} e^{-t/\tau};$$

$$u_R = Ri = e^{-t/\tau}.$$

Итак, для реальных дифференцирующих звеньев переходная характеристика $H(t) = e^{-t/\tau}$. Ее график представлен на рис. 9.50.

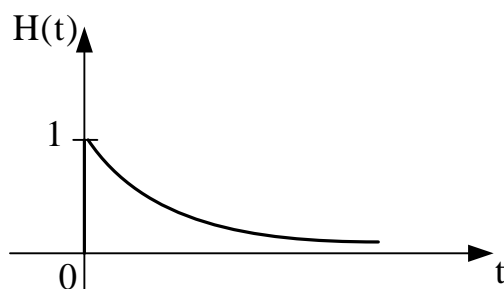


Рисунок 9.50

Инерционные звенья (рис. 9.51)

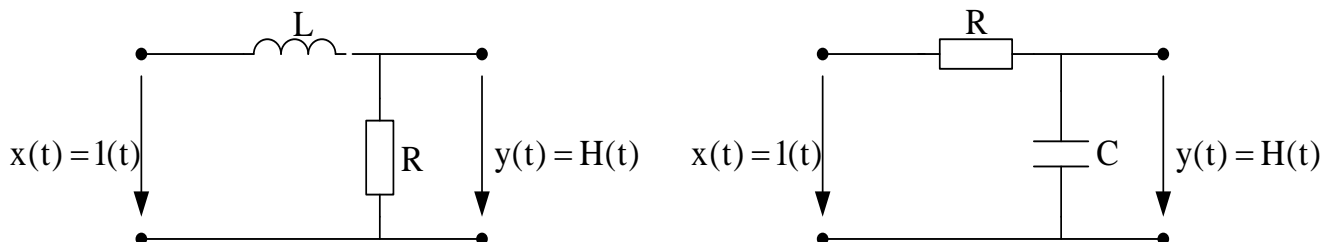


Рисунок 9.51

$$i = \frac{1}{R}(1 - e^{-t/\tau}); \quad u_R = Ri = 1 - e^{-t/\tau} \quad u_c = 1 - e^{-t/\tau}.$$

Для инерционных звеньев переходная характеристика $H(t) = 1 - e^{-t/\tau}$ представлена на рис. 9.52.

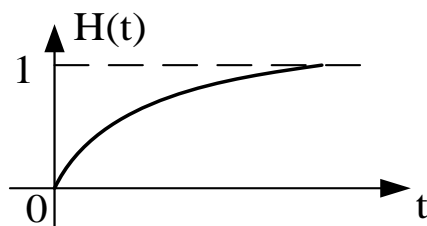


Рисунок 9.52

Инерционные звенья называют также реальными интегрирующими звеньями.

Метод переходных характеристик (интеграл Дюамеля или интеграл наложения)

Пусть на входе цепи приложено напряжение $x(t)$. Его можно представить как сумму большого числа малых скачков (рис. 9.53).

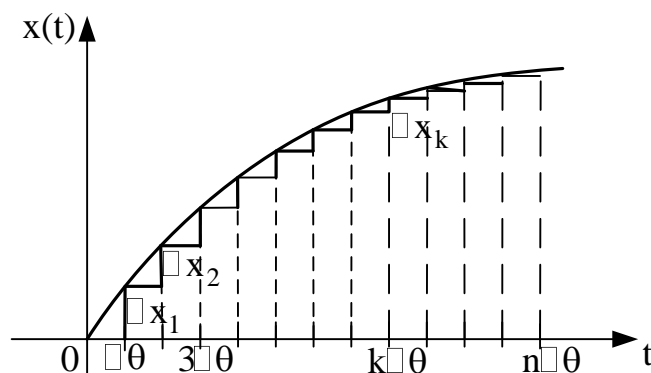


Рисунок 9.53

$$x(t) = \Delta x_1 \cdot 1(t - \Delta\theta) + \Delta x_2 \cdot 1(t - 2\Delta\theta) + \dots + \Delta x_k \cdot 1(t - k\Delta\theta) + \dots =$$

$$= \sum_{k=1}^n \Delta x_k \cdot 1(t - k\Delta\theta).$$

В момент $k\Delta\theta$ переходная характеристика цепи равна $H(t - k\Delta\theta)$. Поэтому выходная величина может быть записана следующим образом:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k \cdot H(t - k\Delta\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{\Delta\theta} \cdot H(t - k\Delta\theta) \cdot \Delta\theta.$$

Если $n \rightarrow \infty$, то $\frac{\Delta x_k}{\Delta\theta} \rightarrow x'(\theta)$, $k\Delta\theta \rightarrow \theta$, $\Delta\theta \rightarrow d\theta$, $n\Delta\theta \rightarrow t$, а сумма переходит в интеграл:

$$y(t) = \int_0^t x'(\theta) H(t - \theta) d\theta. \quad (9.68)$$

Так записывается выходное напряжение, если $x(t)$ - непрерывная функция.

Если $x(t)$ имеет n скачков первого рода, то

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \cdot H(t - \theta_i) + \int_0^t x'(\theta) H(t - \theta) d\theta, \quad (9.69)$$

где θ_i - момент i -того скачка.

Пример 1 (рис. 9.54)

$$x(t) = e^{-10^3 t}, R = 1 \text{ кОм}, C = 10 \text{ мкФ}$$

Найти $y(t)$.

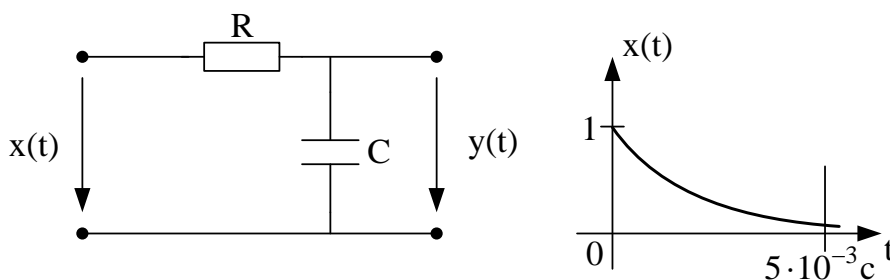


Рисунок 9.54

Для этой цепи, которая представляет собой инерционное звено,

$$H(t) = 1 - e^{-t/\tau}; \tau = RC = 10^{-2} \text{ с}; H(t) = 1 - e^{-100t}; x(t) = e^{-1000t}; x(0) = 1.$$

Функция $x(t)$ имеет скачок при $t = 0$.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(0) \cdot H(t) + \int_0^t x'(\theta) H(t - \theta) d\theta = 1(1 - e^{-100t}) + \int_0^t (-10^3 e^{-10^3 \theta}) \times \\ &\times (1 - e^{-100(t-\theta)}) d\theta = 1 - e^{-100t} + \int_0^t (-10^3 e^{-10^3 \theta}) d\theta + \int_0^t (10^3 e^{-100t} \cdot e^{-900\theta}) d\theta = \\ &= 1 - e^{-100t} + e^{-10^3 \theta} \Big|_0^t + 10^3 e^{-100t} \cdot \frac{e^{-900\theta}}{-900} \Big|_0^t = 1 - e^{-100t} + e^{-10^3 t} - \\ &- 1 - 1,11(e^{-1000t} - e^{-100t}) = 0,11e^{-100t} - 0,11e^{-1000t}. \end{aligned}$$

График выходной величины представлен на рис. 9.55

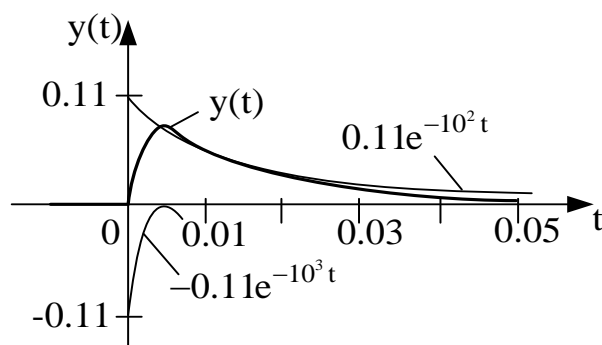


Рисунок 9.55

Пример 2 (рис. 9.56) – реальное дифференцирующее звено.

$$U = 10 \text{ В}, \tau_u = 0,4 \text{ мс}; R = 50 \text{ Ом}; L = 10 \text{ мГн};$$

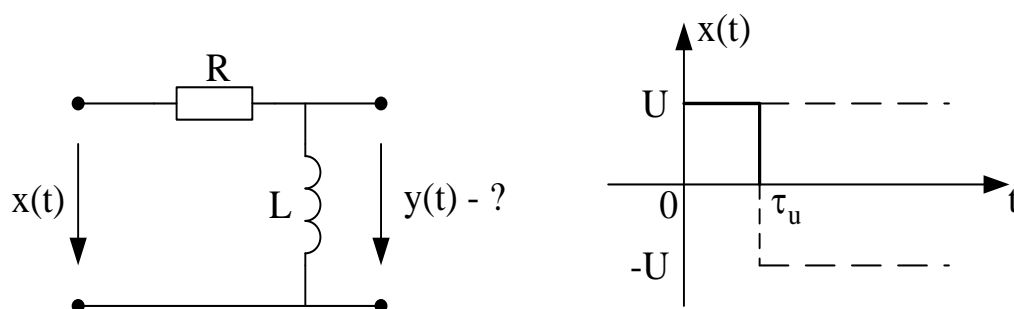


Рисунок 9.56

$x(t)$ – прямоугольный импульс, τ_u – длительность импульса.

$\tau_u - 0$ – последний момент перед $t = \tau_u$; $\tau_u + 0$ – первый момент после $t = \tau_u$.

$$x(t) = 10 \cdot 1(t) - 10 \cdot 1(t - \tau_u), \quad x'(t) = 0$$

$$\tau = \frac{L}{R} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ c}; \quad \frac{1}{\tau} = 5000 \text{ c}^{-1}; \quad H(t) = e^{-5000t}.$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(0) \cdot H(t) \cdot 1(t) + \Delta x(\tau_u) \cdot H(t - \tau_u) \cdot 1(t - \tau_u) = 10 \cdot e^{-5000t} \cdot 1(t) - \\ &- 10 \cdot e^{-5000(t - 0,4 \cdot 10^{-3})} \cdot 1(t - 0,4 \cdot 10^{-3}) = 10 \cdot e^{-5000t} \cdot 1(t) - 10 \cdot e^{-5000t} \cdot e^2 \cdot 1(t - \tau_u) = \\ &= 10 \cdot e^{-5000t} \cdot 1(t) - 73,89 e^{-5000t} \cdot 1(t - \tau_u). \end{aligned}$$

При $t \leq \tau_u - 0$, $y(t) = 10e^{-5000t}$. При $t \geq \tau_u + 0$, $y(t) = -63,89e^{-5000t}$.

На рис. 9.57 представлен график выходного напряжения.

$t, \text{мс}$	$u_2, \text{В}$
0	10
0,2	3,68
0,4	$1,35 \rightarrow -8,65$
0,6	-3,18
0,8	-1,17
1,0	-0,43

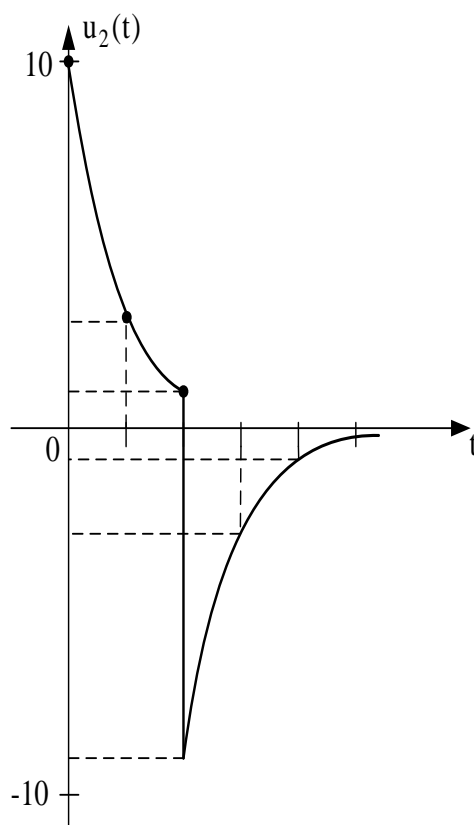


Рисунок 9.57

9.9 Метод переменных состояния

Этот метод заключается в выделении таких искоемых величин, которые определяют энергетическое состояние цепи, так как переходный процесс состоит в переходе от одного установившегося энергетического состояния к другому. Энергетическое состояние цепи полностью определяется токами в индуктивных катушках и напряжениями на конденсаторах. Эти величины и называются переменными состояния. Через них могут быть выражены все остальные токи и напряжения.

Систему уравнений электрической цепи, составленную по законам Кирхгофа, можно преобразовать к системе дифференциальных уравнений в канонической форме:

Матрица (X_0) - матрица-столбец начальных значений переменных состояния. $(X'_0) = (A)(X_0) + (B)(V)$;

$$(Y_0) = (C)(X_0) + (D)(V). \quad (9.73)$$

Выбирается достаточно малый шаг по времени Δt . Пусть на каждом промежутке Δt производная от переменной состояния меняется по линейному закону:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = ax + b;$$

$$x_{n+1} - x_n = \left(a \frac{x_{n+1} + x_n}{2} + b \right) \Delta t;$$

$$x_{n+1} \left(1 - \frac{a}{2} \Delta t \right) = x_n \left(1 + \frac{a}{2} \Delta t \right) + b \Delta t;$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n \left(1 + \frac{a}{2} \Delta t \right) + b \Delta t}{1 - \frac{a}{2} \Delta t}.$$

В программах для ЭВМ применяются более совершенные численные методы. При каждом значении x_{n+1} определяется y_{n+1} и т.д.

Рассмотрим пример (рис. 9.58).

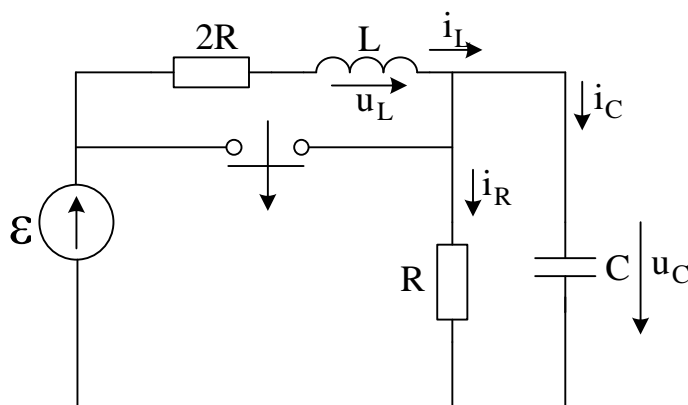


Рисунок 9.58

$$(X) = \begin{pmatrix} i_L \\ u_C \end{pmatrix}; \quad (X') = \begin{pmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{pmatrix}; \quad (V) = E; \quad (X_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}; \quad i_L(0) = 0; \quad u_C(0) = E.$$

Уравнения по законам Кирхгофа:

$$-i_L + i_R + i_C = 0; \quad (9.74)$$

$$2Ri_L + L \frac{di_L}{dt} + u_C = E; \quad (9.75)$$

$$u_C - Ri_R = 0. \quad (9.76)$$

Из (9.76) $i_R = \frac{u_C}{R}$; из (9.74) $i_L = \frac{u_C}{R} + i_C$;

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (9.77)$$

Из (9.75) и (9.77) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= -\frac{2R}{L}i_L - \frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}E; \\ \frac{du_C}{dt} &= \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{RC}u_C + 0E. \end{aligned} \quad (9.78)$$

Составляем матрицы (A) и (B) .

$$(A) = \begin{pmatrix} -\frac{2R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}; \quad (B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.79)$$

Пусть

$$(Y) = \begin{pmatrix} i_L \\ i_R \\ i_C \\ u_L \\ u_C \end{pmatrix} \quad (9.80)$$

$$i_L = 1 \cdot i_L + 0 \cdot u_C + 0 \cdot E;$$

$$i_R = 0 \cdot i_L + \frac{1}{R} \cdot u_C + 0 \cdot E;$$

$$i_C = 1 \cdot i_L - \frac{1}{R} \cdot u_C + 0 \cdot E; \quad (9.81)$$

$$u_L = -2R \cdot i_L - 1 \cdot u_C + 1 \cdot E;$$

$$u_C = 0 \cdot i_L + 1 \cdot u_C + 0 \cdot E.$$

Составляем матрицы (C) и (D) .

$$(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \\ 1 & -\frac{1}{R} \\ -2R & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (D) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.82)$$

В память компьютера вводятся матрицы (X_0) , (A) , (B) и одна из строк матриц (C) и (D) , а также Δt . На дисплее или принтере выводятся значения t и y . Можно также вывести график искомой величины $y(t)$.

10. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

До сих пор мы рассматривали такие цепи, каждый элемент которых обладал одним видом энергии. Ток на входе и выходе каждого элемента был одинаков и зависел только от времени.

Однако существуют и такие цепи, каждый бесконечно малый участок которых имеет все виды энергии, а токи на входе и выходе отличаются друг от друга; напряжение и ток каждого бесконечно малого участка зависят не только от времени, но и от его расположения, т.е. от координаты.

Такая цепь называется цепью с распределенными параметрами. Наиболее важным случаем цепей с распределенными параметрами являются линии передачи энергии и сигналов, поэтому такие цепи называют еще длинными линиями. Вопрос о том, является ли данная линия длинной, т.е. следует ли к ее расчету применять теорию цепей с распределенными параметрами, решается на основе следующих соображений.

Как указывалось ранее, линия не считается длинной, если за время изменения тока на 1% от максимального значения электромагнитная волна успевает распространиться от начала линии до ее конца. Скорость распространения электромагнитных волн будем считать равной скорости света.

$$I_m \sin \omega t = 0,01 I_m; \quad \sin \omega t = 0,01; \quad \omega t = 0,01 \text{ рад.}$$

$$t = \frac{0,01}{\omega}; \quad \ell = Vt = 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{0,01}{\omega} = \frac{3 \cdot 10^6}{\omega} (\text{м}).$$

Если $f = 50$ Гц и $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$, то $\ell \cong 9,6 \cdot 10^3 \text{ м} = 9,6 \text{ км}$.

Если $f = 1$ МГц и $\omega = 2\pi \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, то $\ell = 0,48 \text{ м}$.

Таким образом, при частоте 50 Гц линия считается длинной при $\ell > 9,6$ км, а при радиочастотах линии, длина которых составляет несколько сантиметров, тоже относятся к длинным линиям.

10.1. Первичные параметры линии

Каждый участок линии имеет активное сопротивление; провода линии образуют замкнутый контур, с которым сцепляется магнитный поток, и каждый ее участок обладает индуктивностью; между проводами линии создается электрическое поле, и каждый участок обладает емкостью; на каждом участке имеется также проводимость утечки, обусловленная несовершенством изоляции.

Величины параметров линии, измеренные на единице ее длины, называются первичными параметрами линии.

$$R_0 [\text{Ом/км}], L_0 [\text{Гн/км}], C_0 [\text{Ф/км}], G_0 [\text{См/км}].$$

Если эти величины вдоль линии не изменяются, линия называется однородной.

10.2. Дифференциальные уравнения длинной однородной линии

Изобразим схему замещения бесконечно малого участка линии в соответствии с физическими представлениями (рис. 10.1).

По второму закону Кирхгофа:

$$R_0 i dx + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = 0,$$

по первому закону Кирхгофа:

$$-i + G_0 u dx + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} dx + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx = 0.$$

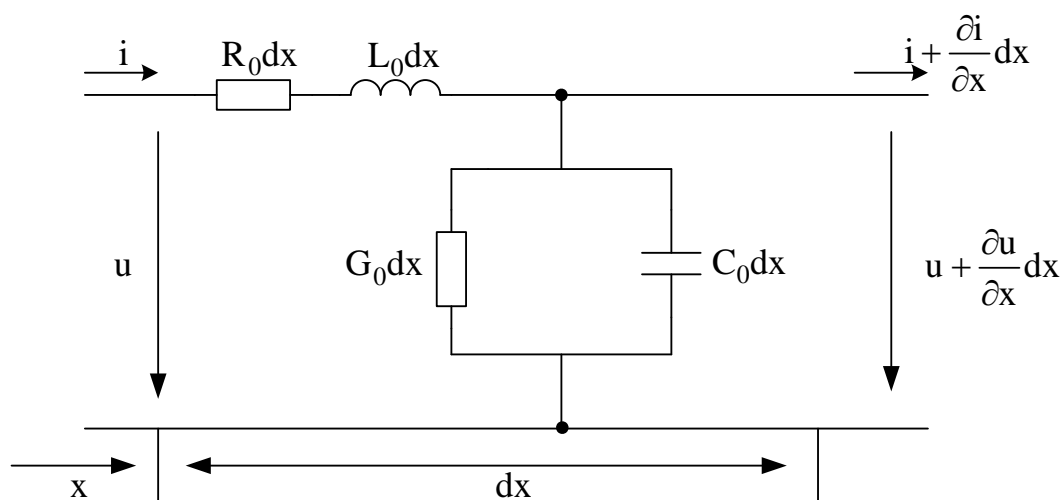


Рисунок 10.1

После сокращения на dx получим:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}; \end{cases} \quad (10.1)$$

Дифференциальные уравнения линии имеют следующий смысл.

Убыль напряжения на единицу длины линии равна падению напряжения на ее активном сопротивлении и напряжению, которое расходуется на преодоление ЭДС самоиндукции.

Убыль тока на единицу длины линии равна току утечки и току смещения.

Наличие в дифференциальных уравнениях частных производных обусловлено тем, что напряжение и ток зависят и от времени, и от координаты.

10.3. Дифференциальные уравнения линии в установившемся синусоидальном режиме

Запишем мгновенные значения и представим их в виде комплексов.

$$u(x, t) = U_m(x) \sin(\omega t + \psi_u(x));$$

$$i(x, t) = I_m(x) \sin(\omega t + \psi_i(x));$$

$$u = [\underline{U}_m(x) e^{j\omega t}]_{\text{im}}, \quad i = [\underline{I}_m(x) e^{j\omega t}]_{\text{im}},$$

где $\underline{U}_m(x) = U_m(x) e^{j\psi_u(x)}$; $\underline{I}_m(x) = I_m(x) e^{j\psi_i(x)}$.

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{d\underline{U}_m}{dx} e^{j\omega t} \right]_{\text{im}}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = [j\omega \underline{U}_m e^{j\omega t}]_{\text{im}}.$$

Для тока можно записать аналогичные выражения. После подстановки этих выражений в дифференциальные уравнения (10.1) можно опустить знак мнимой части и сократить на $e^{j\omega t}$, а также разделить на $\sqrt{2}$ для перехода от комплексных амплитуд к комплексам действующих значений. Тогда получим такую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{d\underline{U}}{dx} = R_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I} = \underline{Z}_0 \underline{I}; \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} = G_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U} = \underline{Y}_0 \underline{U}. \end{cases} \quad (10.2)$$

Здесь обозначено: $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$; $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$.

Следует обратить внимание, что величины \underline{Z}_0 и \underline{Y}_0 не являются взаимно обратными.

10.4. Решение дифференциальных уравнений линии в установившемся синусоидальном режиме

Продифференцируем первое уравнение (10.2) по x , поменяем его знак и подставим в него второе уравнение (10.2):

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \left(-\frac{d \underline{I}}{dx} \right) = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \underline{U}.$$

Обозначим $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}$ и получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U} = 0. \quad (10.3)$$

Его характеристическое уравнение: $p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0$. Корни характеристического уравнения: $p_{1,2} = \pm \underline{\gamma}$.

Решение дифференциального уравнения (10.3) имеет вид:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}; \quad (10.4)$$

$$-\frac{d \underline{U}}{dx} = \underline{\gamma} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x});$$

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_0} \left(-\frac{d \underline{U}}{dx} \right) = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}).$$

$$\frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} = \sqrt{\frac{\underline{Y}_0}{\underline{Z}_0}}; \text{ обозначим } \underline{Z}_B = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}, \text{ тогда}$$

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_B} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}). \quad (10.5)$$

Величины $\underline{\gamma}$ и \underline{Z}_B называются вторичными параметрами линии. Это комплексные числа: $\underline{\gamma}$ – постоянная распространения, \underline{Z}_B – волновое сопротивление линии.

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \alpha + j\beta,$$

где α – коэффициент затухания; β – коэффициент фазы.

Комплексные постоянные интегрирования:

$$\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1} \quad \text{и} \quad \underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$$

определяются из граничных условий.

10.5. Бегущие волны в линии

Докажем, что в выражениях напряжения и тока (10.4) и (10.5) слагаемые представляют собой бегущие волны – прямую и обратную:

$$\underline{U} = A_1 e^{-\alpha x} \cdot e^{j(\psi_1 - \beta x)} + A_2 e^{\alpha x} \cdot e^{j(\psi_2 + \beta x)} = \underline{U}_{\text{пр}} + \underline{U}_{\text{об}}. \quad (10.6)$$

Рассмотрим эти слагаемые подробнее, для чего перейдем к мгновенным значениям.

Прямая волна напряжения

$$u_{\text{пр}} = A_1 \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x). \quad (10.7)$$

Изобразим графики $u(x)$ в два последовательных момента времени (рис. 10.2).

Допустим, что $t_2 > t_1$. Рассмотрим перемещение точки, в которой синусоида проходит через ноль.

$$\sin(\omega t_1 + \psi_1 - \beta x_{01}) = 0.$$

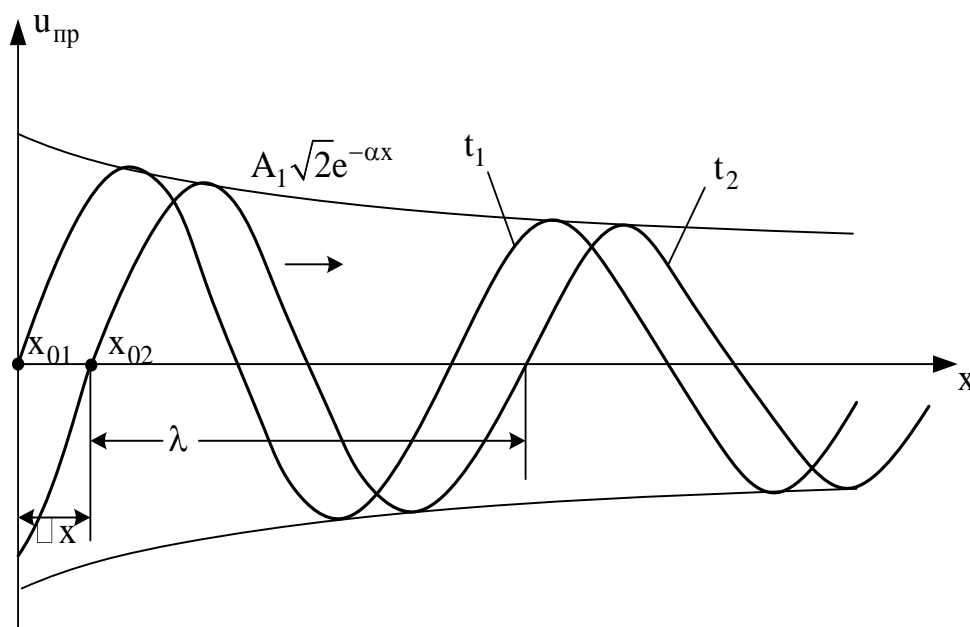


Рисунок 10.2

Если $\omega t_2 > \omega t_1$, то для того, чтобы синус был равен нулю, должно быть $\beta x_{02} > \beta x_{01}$, т.е. за время $\Delta t = t_2 - t_1$ волна переместится вправо на расстояние $\Delta x = V_\phi \Delta t$.

Здесь величина V_ϕ называется фазовой скоростью и представляет собой скорость движения вдоль линии точки, в которой фаза колебаний остается постоянной.

Длиной волны называется расстояние между точками, у которых фаза колебаний отличается на 2π .

Найдем фазовую скорость и длину волны.

$$\omega t + \psi_1 - \beta x = \text{const}; \quad \omega dt = \beta dx; \quad V_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (10.8)$$

Иначе можно определить длину волны как расстояние, которое волна проходит за один период.

$$\lambda = V_{\text{ф}} T = \frac{\omega}{\beta} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta}.$$

На рис. 10.2 показан отрезок, равный длине волны.

Обратная волна

$$u_{\text{об}} = A_2 \sqrt{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x).$$

Эта волна перемещается от конца линии к ее началу и затухает по мере своего движения. Для обратной волны фазовая скорость имеет противоположный знак: $V_{\text{ф обр}} = -\frac{\omega}{\beta}$.

Слагаемые в уравнении тока также имеют смысл бегущих волн:

$$\underline{I} = \underline{I}_{\text{пр}} - \underline{I}_{\text{обр}}, \text{ где } \underline{I}_{\text{пр}} = \frac{\underline{U}_{\text{пр}}}{\underline{Z}_B}; \quad \underline{I}_{\text{обр}} = \frac{\underline{U}_{\text{обр}}}{\underline{Z}_B}.$$

Таким образом, \underline{Z}_B - сопротивление линии бегущей волне напряжения.

Коэффициент затухания α показывает, насколько уменьшается величина напряжения (или тока) при перемещении волны на единицу длины:

$$\alpha = \ln \frac{U_{\text{пр } x}}{U_{\text{пр } x+1}}.$$

Коэффициент фазы β показывает, насколько изменяется фаза напряжения (или тока) при перемещении волны на единицу длины:

$$\beta = \psi_{u \text{ пр } x} - \psi_{u \text{ пр } x+1}.$$

10.6. Определение постоянных интегрирования в дифференциальных уравнениях линии

Пусть в уравнениях

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}; \quad (10.4)$$

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_B} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}), \quad (10.5)$$

заданы напряжение и ток в конце линии:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \text{ и } \underline{I} = \underline{I}_2 \text{ при } x = \ell.$$

Введем отсчет координаты от конца линии и произведем замену переменных: $x = \ell - x'$.

Тогда получим:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}\ell} e^{\underline{\gamma}x'} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}\ell} e^{-\underline{\gamma}x'}; \\ \underline{Z}_B \underline{I} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}\ell} e^{\underline{\gamma}x'} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}\ell} e^{-\underline{\gamma}x'}. \end{cases} \quad (10.6)$$

Обозначим $\underline{A}_3 = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}\ell}$; $\underline{A}_4 = \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}\ell}$.

В конце линии, при $x = \ell$ и $x' = 0$, получим:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{A}_3 + \underline{A}_4; \\ \underline{Z}_B \underline{I}_2 = \underline{A}_3 - \underline{A}_4. \end{cases}$$

Сложим и вычтем эти выражения.

$$\underline{A}_3 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_B \underline{I}_2}{2}; \quad \underline{A}_4 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_B \underline{I}_2}{2}. \quad (10.7)$$

После подстановки этих выражений в уравнения линии и группировки слагаемых получим:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x' + \underline{Z}_B \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x'; \\ \underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x' + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x'. \end{cases} \quad (10.8)$$

С помощью этих уравнений и производится расчет линии в установившемся синусоидальном режиме.

Коэффициент отражения волны от конца линии

$$\underline{N} = \frac{\underline{A}_4}{\underline{A}_3} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_B \underline{I}_2}{\underline{U}_2 + \underline{Z}_B \underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B},$$

поскольку $\underline{U}_2 = \underline{Z}_H \underline{I}_2$.

Если $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$, то $\underline{A}_4 = 0$, $\underline{N} = 0$, т.е. в этом случае отсутствует обратная волна.

Таким образом, \underline{Z}_B - такое сопротивление нагрузки, при котором нет отражения волны от конца линии, т.к. такая нагрузка полностью потребляет энергию, которую несет прямая волна.

Режим работы линии при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$ называется режимом согласованной нагрузки. Он предпочтителен для линий передачи информации.

10.7. Линия как четырехполюсник

При $x' = \ell$ и $\underline{U} = \underline{U}_1$, $\underline{I} = \underline{I}_1$, поэтому получим:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} \ell + \underline{Z}_B \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} \ell; \\ \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} \ell + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} \ell. \end{cases}$$

Эти уравнения полностью совпадают с уравнениями симметричного четырехполюсника, если его вторичные параметры $\underline{Z}_C = \underline{Z}_B$; $\underline{\Gamma} = \underline{\gamma} \ell$.

Следовательно, линию в установившемся режиме можно рассматривать как симметричный ЧП.

10.8. Линия без искажений

При передаче информации по линии очень важно добиться отсутствия искажений.

Поскольку информационные сигналы несинусоидальны, то для сохранения их формы достаточно выполнения следующих условий:

- 1) коэффициент затухания α не должен зависеть от частоты;
- 2) фазовая скорость V_ϕ не должна зависеть от частоты.

Докажем, что эти требования выполняются, если между первичными параметрами существуют соотношения, называемые условиями Хевисайда:

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} \quad \text{или} \quad \frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}.$$

Найдем для этого случая постоянную распространения:

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{R_0 \left(1 + j\omega \frac{L_0}{R_0}\right) G_0 \left(1 + j\omega \frac{C_0}{G_0}\right)} = \\ &= \sqrt{R_0 G_0} \left(1 + j\omega \frac{L_0}{R_0}\right) = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{\frac{R_0 G_0 L_0^2}{R_0^2}} = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\frac{G_0 L_0}{R_0} = C_0$.

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0} \neq f(\omega); \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}; \quad V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \neq f(\omega).$$

Таким образом, указанные выше условия отсутствия искажений выполняются.

Найдем волновое сопротивление неискажающей линии.

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0 \left(\frac{R_0}{L_0} + j\omega \right)}{C_0 \left(\frac{G_0}{C_0} + j\omega \right)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Таким образом, неискажающая линия имеет чисто активное волновое сопротивление, не зависящее от частоты.

$$\underline{Z}_B = z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Следует заметить, что для реальных линий условия Хевисайда обычно не удовлетворяются, причем

$$\frac{R_0}{G_0} > \frac{L_0}{C_0}.$$

Для достижения равенства наиболее экономично увеличить L_0 путем установки сосредоточенных индуктивностей через равные отрезки линии.

10.9. Линия без потерь

При высоких частотах $R_0 \ll \omega L_0$ и $G_0 \ll \omega C_0$, поэтому можно пренебречь R_0 и G_0 , которые и определяют потери мощности в линии.

Такая линия, в которой $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$, называется линией без потерь.

Найдем вторичные параметры линии без потерь.

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0} = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = j\beta.$$

В линии без потерь $\alpha = 0$, $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$, $V_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$.

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{j\omega L_0}{j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = z_B.$$

Линия без потерь – частный случай неискажающей линии. Запишем уравнения линии без потерь.

$$ch\underline{\gamma}x' = ch(j\beta x') = \cos \beta x';$$

$$sh\underline{\gamma}x' = sh(j\beta x') = j \sin \beta x';$$

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta x' + jz_B \underline{I}_2 \sin \beta x'; \\ \underline{I} = j \frac{\underline{U}_2}{z_B} \sin \beta x' + \underline{I}_2 \cos \beta x'. \end{cases} \quad (10.9)$$

Таким образом, в уравнения линии без потерь входят тригонометрические, а не гиперболические функции.

Найдем входное сопротивление произвольного отрезка линии без потерь, учитывая, что $\underline{U}_2 = \underline{Z}_H \underline{I}_2$.

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_H \cos \beta x' + jz_B \sin \beta x'}{j \frac{\underline{Z}_H}{z_B} \sin \beta x' + \cos \beta x'} = z_B \frac{\underline{Z}_H + jz_B \operatorname{tg} \beta x'}{z_B + j\underline{Z}_H \operatorname{tg} \beta x'}. \quad (10.10)$$

Входное сопротивление зависит от сопротивления нагрузки и длины отрезка линии.

Режимы работы линии без потерь

Режим согласованной нагрузки: $\underline{Z}_H = R_H = z_B$. В этом случае $\underline{Z}_{\text{âö}} = z_B$ в любой точке линии.

Поскольку в этом случае $\underline{Z}_H \underline{I}_2 = z_B \underline{I}_2 = \underline{U}_2$, то

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_2 (\cos \beta x' + j \sin \beta x') = \underline{U}_2 e^{j\beta x'}; \\ \underline{I} &= \underline{I}_2 (j \sin \beta x' + \cos \beta x') = \underline{I}_2 e^{j\beta x'}.\end{aligned}\quad (10.11)$$

Входное сопротивление $\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = z_B$.

Коэффициент отражения $\underline{N} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B} = 0$.

При согласованной нагрузке отсутствует обратная волна. Вся энергия, которую несет прямая волна, потребляется согласованной нагрузкой.

Мгновенные значения:

$$\begin{aligned}u &= U_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta x'); \\ i &= I_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta x').\end{aligned}$$

Это уравнение прямых бегущих незатухающих волн напряжения и тока, совпадающих по фазе в любой точке линии.

$$\frac{u}{i} = \frac{U_2}{I_2} = z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \quad \frac{L_0 i^2}{2} = \frac{C_0 u^2}{2}.$$

При согласованной нагрузке в бегущей волне энергия содержится в магнитном и электрическом поле поровну, а в конце линии превращается в тепло.

Режимы стоячих волн

Если нагрузка не потребляет активной мощности (режим холостого хода, режим короткого замыкания, режим чисто реактивной нагрузки), коэффициент отражения по модулю становится равным единице: $n = 1$. При этом в линии без потерь возникают прямая и обратная волны одинаковой амплитуды, в результате наложения которых образуются стоячие волны.

а) Режим холостого хода. $\underline{Z}_H = \infty$; $\underline{I}_2 = 0$.

Уравнения линии принимают вид:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta x'; \\ \underline{I} = j \frac{\underline{U}_2}{z_B} \sin \beta x'. \end{cases} \quad (10.12)$$

Ток в любой точке линии опережает напряжение по фазе на угол 90° (j во втором уравнении).

Мгновенные значения:

$$\begin{cases} u = U_2 \sqrt{2} \cos \beta x' \sin \omega t; \\ i = \frac{U_2}{z_B} \sqrt{2} \sin \beta x' \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{cases} \quad (10.13)$$

Это и есть уравнения стоячих волн.

Входное сопротивление разомкнутой линии:

$$\underline{Z}_{\text{âõ}} = -jz_{\text{â}} \operatorname{ctg} \beta x' = jX_{\text{âõ}}; \quad X_{\text{âõ}} = -z_{\text{â}} \operatorname{ctg} \beta x' - \text{чисто реактивное сопротивление.}$$

Построим графики $U, I, X_{\text{вх}}$ в зависимости от x' , т.е. от расстояния до конца линии. Возьмем характерные точки, отстоящие друг от друга на расстояние $\frac{\lambda}{2}$:

$$x' = k \frac{\lambda}{2}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\beta x' = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot k \frac{\lambda}{2} = k\pi;$$

$$\cos \beta x' = \pm 1; \quad |\cos \beta x'| = 1; \quad \sin \beta x' = 0.$$

В этих точках линии имеем пучности в кривой U и узлы в кривой I .

Если взять $x' = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, (2k+1)\frac{\lambda}{4}$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, то

$$\beta x' = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (2k+1) \frac{\lambda}{4} = (2k+1) \frac{\pi}{2}.$$

В этих точках $\cos \beta x' = 0$, $|\sin \beta x'| = 1$, т.е. пучности в кривой I и узлы в кривой U .

Графики действующих значений U, I изображены на рис. 10.3.

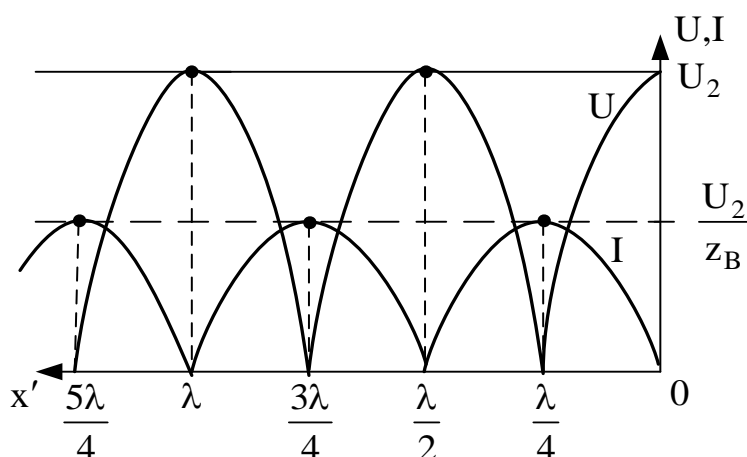


Рисунок 10.3

В этом режиме энергия не передается через точки, где U или I равны нулю. Происходят колебания энергии между магнитным и электрическим полем в пределах отрезков длиной $\frac{\lambda}{4}$.

Исследуем зависимость $\underline{Z}_{\text{ао}}$ от координаты x' .

Если $0 < x' < \frac{\lambda}{4}$, $0 < \beta x' < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{ctg} \beta x' > 0$, $\operatorname{ctg} \beta x'$ уменьшается. $X_{\text{вх}} < 0$, т.е. носит емкостный характер.

Если $\frac{\lambda}{4} < x' < \frac{\lambda}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \beta x' < \pi$, $\operatorname{ctg} \beta x' < 0$ и увеличивается по абсолютной величине. $x_{\text{хв}} > 0$, т.е. носит индуктивный характер.

Далее зависимость периодически повторяется. (рис.10.4)

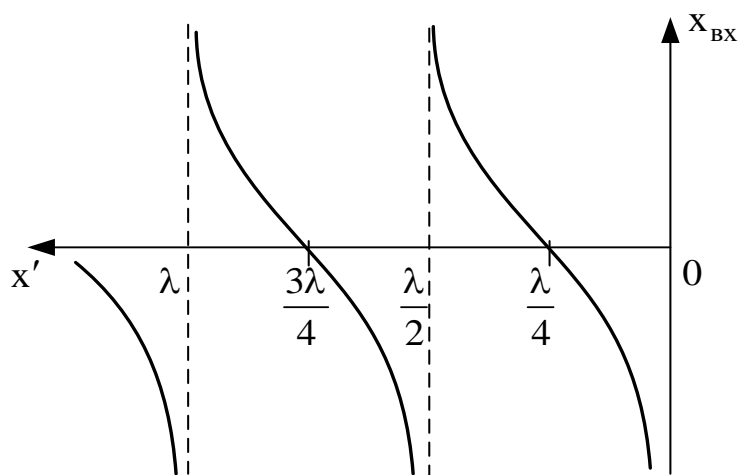


Рисунок 10.4

Линией в режиме холостого хода при $x' < \frac{\lambda}{4}$ можно с высокой точностью моделировать емкости при высоких частотах.

б) Режим короткого замыкания: $\underline{Z}_H = 0$, $\underline{U}_2 = 0$.

Уравнения линии в этом режиме:

$$\begin{cases} \underline{U} = jz_B \underline{I}_2 \sin \beta x'; \\ \underline{I} = \underline{I}_2 \cos \beta x'. \end{cases} \quad (10.14)$$

В любой точке линии напряжение опережает ток по фазе на угол 90° .

Мгновенные значения:

$$\begin{cases} u = z_B I_2 \sqrt{2} \sin \beta x' \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right); \\ i = I_2 \sqrt{2} \cos \beta x' \sin \omega t. \end{cases} \quad (10.15)$$

Это также уравнения стоячих волн.

Входное сопротивление короткозамкнутой линии:

$$\underline{Z}_{\hat{a}\hat{o}} = jz_a \operatorname{tg} \beta x' = jX_{\hat{a}\hat{o}},$$

где $X_{\hat{a}\hat{o}} = z_a \operatorname{tg} \beta x'$ - чисто реактивное сопротивление.

На графиках действующих значений U, I узлы кривой напряжения и пучности кривой тока будут иметь место в точках $x' = k \frac{\lambda}{2}$,

где $k = 0, 1, 2, \dots$ $\beta x' = k\pi$; $\sin \beta x' = 0$; $|\cos \beta x'| = 1$.

Пучности кривой напряжения и узлы кривой тока возникают в точках $x' = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$, где $k = 0, 1, 2$, $\beta x' = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$; $\cos \beta x' = 0$; $|\sin \beta x'| = 1$.

В этом режиме тоже отсутствует передача энергии по линии и происходят колебания энергии в пределах отрезков длиной $\frac{\lambda}{4}$ между узлами кривых напряжения и тока.

Графики действующих значений и входного сопротивления выглядят следующим образом (рис. 10.5, 10.6).

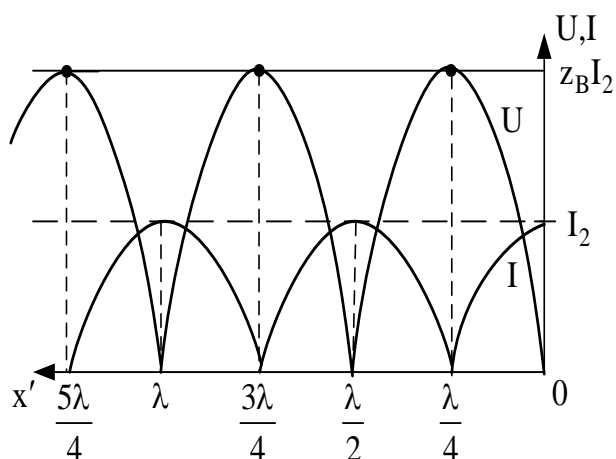


Рисунок 10.5

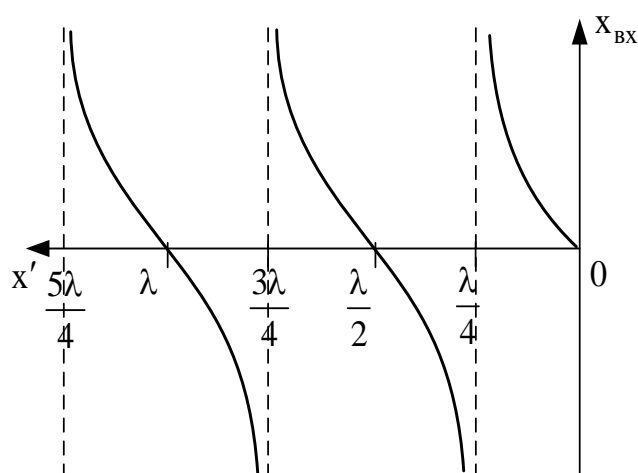


Рисунок 10.6

Линией в режиме к.з. можно с большой точностью моделировать индуктивности при высоких частотах.

10.10. Переходные процессы в линиях

Обычно рассматривают только переходные процессы в линиях без потерь, т.к. при этом значительно упрощается математический аппарат и качественный анализ процессов, а их физическая сущность сохраняется.

Дифференциальные уравнения линии без потерь:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (10.16)$$

сводятся к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (10.17)$$

где $V = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ - волновая скорость.

Решение этого уравнения:

$$u = f_1(x - Vt) + f_2(x + Vt) = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}. \quad (10.18)$$

Для тока аналогично:

$$i = \frac{1}{z_B} [f_1(x - Vt) - f_2(x + Vt)] = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}}. \quad (10.19)$$

Здесь $z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$.

$u_{\text{пад}}, i_{\text{пад}} = \frac{u_{\text{пад}}}{z_B}$ - падающие волны напряжения и тока, которые перемещаются со скоростью V от начала линии к ее концу.

$u_{\text{отр}}, i_{\text{отр}} = \frac{u_{\text{отр}}}{z_B}$ - отраженные волны напряжения и тока, которые перемещаются со скоростью V от конца линии к ее началу.

При включении линии на постоянное напряжение в линии возникают прямоугольные волны напряжения U_0 и тока $I_0 = \frac{U_0}{z_B}$. Поэтому считают, что

$$u_{\text{пад}} = U_0, i_{\text{пад}} = I_0 = \frac{U_0}{z_B}.$$

В падающей волне энергии электрического и магнитного полей одинаковы. Когда падающая волна достигает конца линии, где $z_H \neq z_B$, возникает отраженная волна.

Для определения отраженных волн напряжения и тока, возникающих в конце линии, используется эквивалентная схема, именуемая в литературе схемой Петерсена. Она строится следующим образом. В конце линии можно записать:

$$\begin{cases} u_2 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} \\ z_B i_2 = u_{\text{пад}} - u_{\text{отр}} \end{cases} \quad (10.20)$$

Здесь учтено, что $i_{\text{пад}} = \frac{u_{\text{пад}}}{z_B}$; $i_{\text{отр}} = -\frac{u_{\text{отр}}}{z_B}$. При сложении уравнений (10.20)

получим:

$$u_2 + z_B i_2 = 2u_{\text{пад}} = 2U_0,$$

что соответствует схеме, изображенной на рис. 10.7.

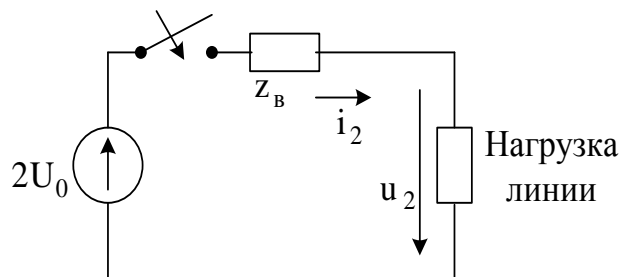


Рисунок 10.7

Из схемы Петерсена при ее включении на постоянное напряжение $2U_0$ классическим или операторным методом определяют $i_2(t)$ или $u_2(t)$ в конце линии, а затем выражают

$$i_{\text{отр}} = I_0 - i_2; u_{\text{отр}} = u_2 - U_0.$$

Поскольку возникающие отраженные волны движутся от конца линии к ее началу, то путь, пройденный волной, пропорционален времени ее существования, и распределение отраженных волн вдоль линии подобно их зависимости от времени.

После построения отраженных волн для получения результирующих волн в каждой точке линии u_{nad} и u_{otr} суммируются, а i_{nad} и i_{otr} вычитаются.

Для качественного анализа переходных процессов в линиях удобно пользоваться значениями коэффициента отражения в моменты $t = 0$ и $t \rightarrow \infty$, когда этот коэффициент является вещественным числом:

$$n = \frac{z_H - z_B}{z_H + z_B}.$$

Моментом начала переходного процесса ($t = 0$) считается тот момент, когда падающая волна впервые достигает конца линии.

Если в конце линии имеется сосредоточенная индуктивность, то при $t = 0$ ток в ней остается равным нулю согласно первому закону коммутации, поэтому $z_L(0) = \infty$; после окончания переходного процесса, при $t \geq 4,6\tau$, $z_L(\infty) = 0$.

Наоборот, сосредоточенная емкость в конце линии при $t = 0$ имеет нулевое напряжение согласно второму закону коммутации и $z_C(0) = 0$. В установившемся режиме конденсатор не пропускает постоянного тока, т.е. $z_C(\infty) = \infty$.

После определения крайних значений u_{otr} и i_{otr} их графики строятся следующим образом: начальное значение u_{otr} и i_{otr} строится на некотором расстоянии от конца линии $\ell = Vt$, а установившиеся значения волн строятся в конце линии. Между ними проводится экспонента, которая должна плавно приближаться к установившемуся значению. Наличие экспоненты обусловлено тем, что обычно рассматриваются случаи, когда нагрузка линии содержит один реактивный элемент (L или C).

Затем в волне напряжения падающая и отраженная волны суммируются, а в волне тока – вычитаются графически:

$$u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}; i = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}}.$$

Приведем примеры.

По линии без потерь движется волна U_0 . Построить графики распределения напряжения и тока в линии для момента $t \geq 4,6\tau$, считая, что за это время отраженная волна еще не достигла начала линии.

1) Схема изображена на рис. 10.8.

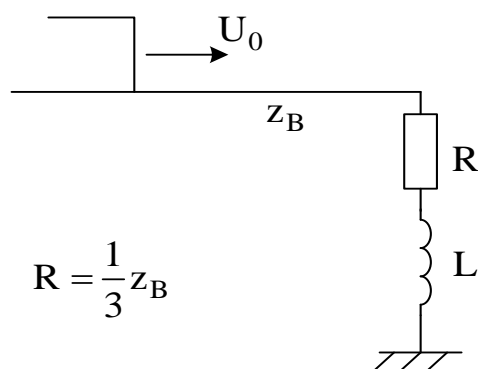


Рисунок 10.8

$$t = 0: z_H = \infty; n = \lim_{z_H \rightarrow \infty} \frac{z_H - z_B}{z_H + z_B} = 1;$$

$$t \geq 4,6\tau: z_H = R = \frac{1}{3} z_B; n = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Графики распределения волн в линии представлены на рис. 10.9.

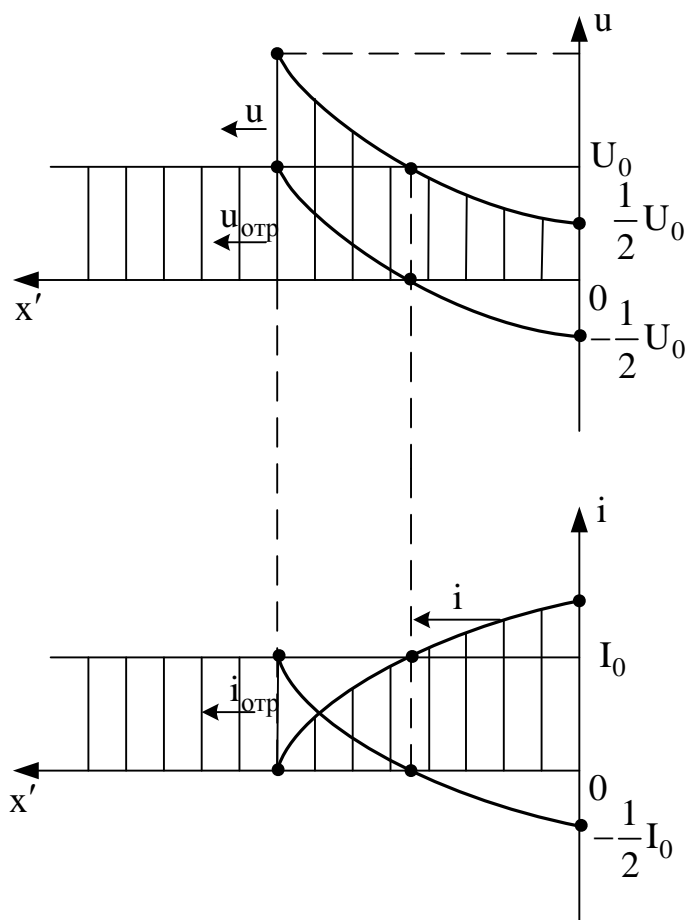


Рисунок 10.9

2) Схема изображена на рис. 10.10.

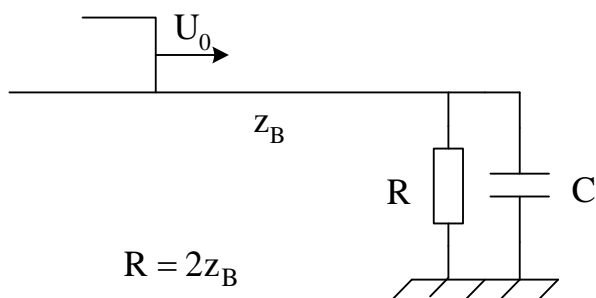


Рисунок 10.10

$$t = 0: \quad z_H = 0; \quad n = \frac{0 - z_B}{0 + z_B} = -1.$$

$$t \geq 4,6\tau: z_H = R = 2z_B; \quad n = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Графики распределения волн в линии имеют вид, представленный на рис. 10.11

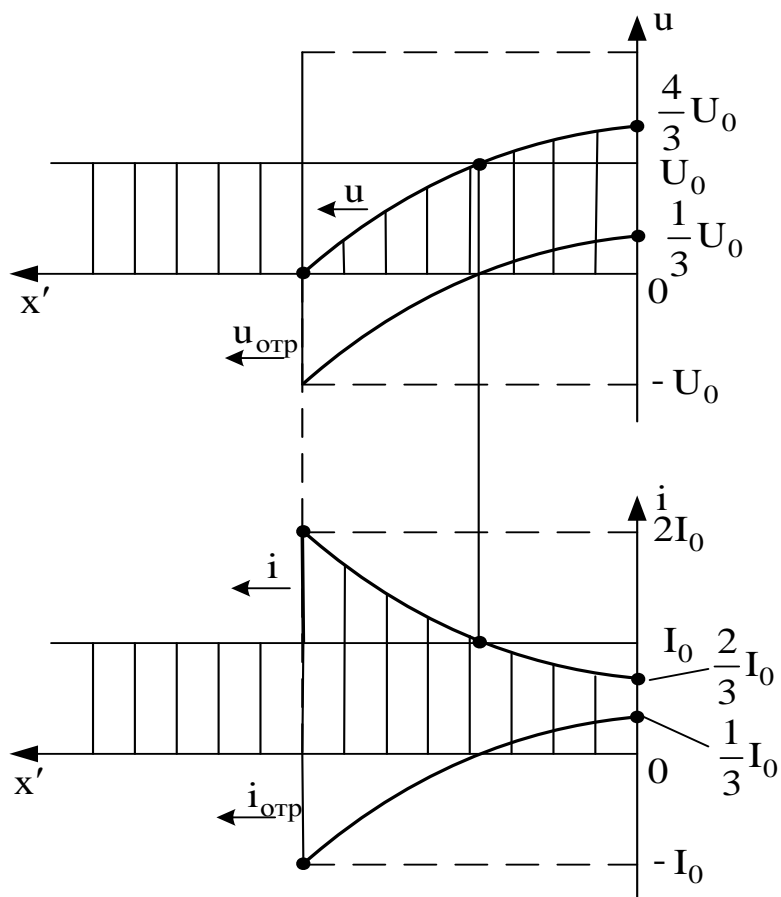


Рисунок 10.11

Следует отметить, что в линии возникает переходный процесс и при активной нагрузке, в том числе при холостом ходе и коротком замыкании линии, причем в этих случаях отраженные волны имеют прямоугольную форму.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

Нелинейной цепью называется такая цепь, параметры которой (R , L , C) зависят от тока и напряжения.

11. Нелинейные электрические цепи постоянного тока

Рассмотрим цепь, содержащую нелинейные резистивные элементы, при постоянном напряжении источника. (рис. 11.1)

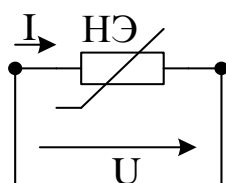


Рисунок 11.1

Зависимость напряжения от тока на нелинейном элементе (НЭ) или наоборот называют вольтамперной характеристикой (ВАХ) нелинейного элемента.

ВАХ могут быть заданы в виде графиков, таблиц и аналитических выражений.

Чаще всего ВАХ снимается экспериментально и представляется в виде графика (рис. 11.2)

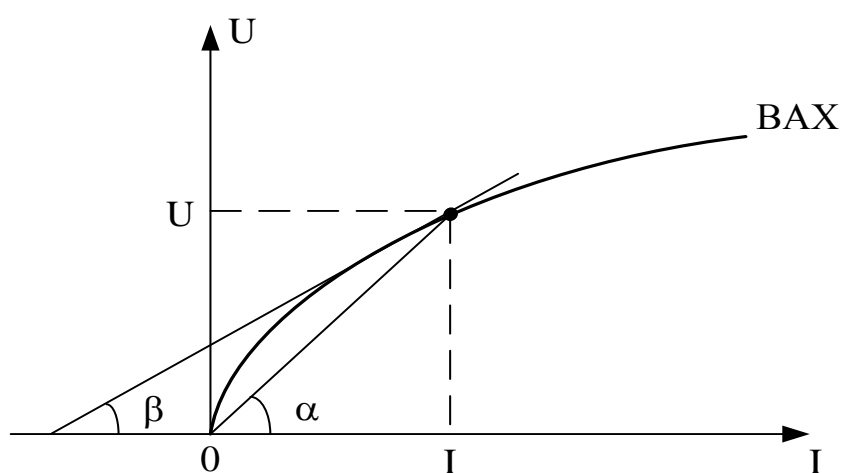


Рисунок 11.2

11.1. Виды сопротивлений нелинейных элементов

Статическим сопротивлением НЭ называется величина

$$R_{\text{ст}} = \frac{U}{I} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{m_U}{m_I}.$$

Динамическим сопротивлением НЭ называют величину $R_{\text{дин}} = \frac{du}{di}$, определяемую по динамической характеристике, получаемой при быстром изменении u или i .

В данном случае, изображена статическая ВАХ. Статические и динамические ВАХ могут существенно отличаться друг от друга.

Дифференциальным сопротивлением НЭ называется величина

$$R_{\text{диф}} = \frac{dU}{dI} = \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{m_U}{m_I}.$$

При медленном изменении величин $R_{\text{дин}} = R_{\text{диф}}$.

11.2. Методы расчета нелинейных цепей постоянного тока

При расчете нелинейных цепей следует помнить, что закон Ома использовать нельзя, т.к. сопротивление НЭ непостоянно и заранее неизвестно.

Законами Кирхгофа пользоваться можно, и на них основаны все методы расчета.

Известны три группы методов расчета.

1) Аналитические методы предполагают аппроксимацию ВАХ аналитической функцией, что обычно достаточно сложно. Достоинством аналитических методов является их высокая точность и возможность исследовать цепь в широком диапазоне изменения величин. К недостаткам этой группы методов следует отнести сложность математического аппарата и отсутствие наглядности.

2) Графические методы наиболее просты и наглядны, однако наименее точны и пригодны лишь для последовательно-параллельных цепей.

3) Графоаналитические методы.

Аналитические методы рассматривать не будем. Рассмотрим коротко графические и один из графоаналитических методов.

Графический метод

1) Последовательное соединение НЭ (рис.11.3).

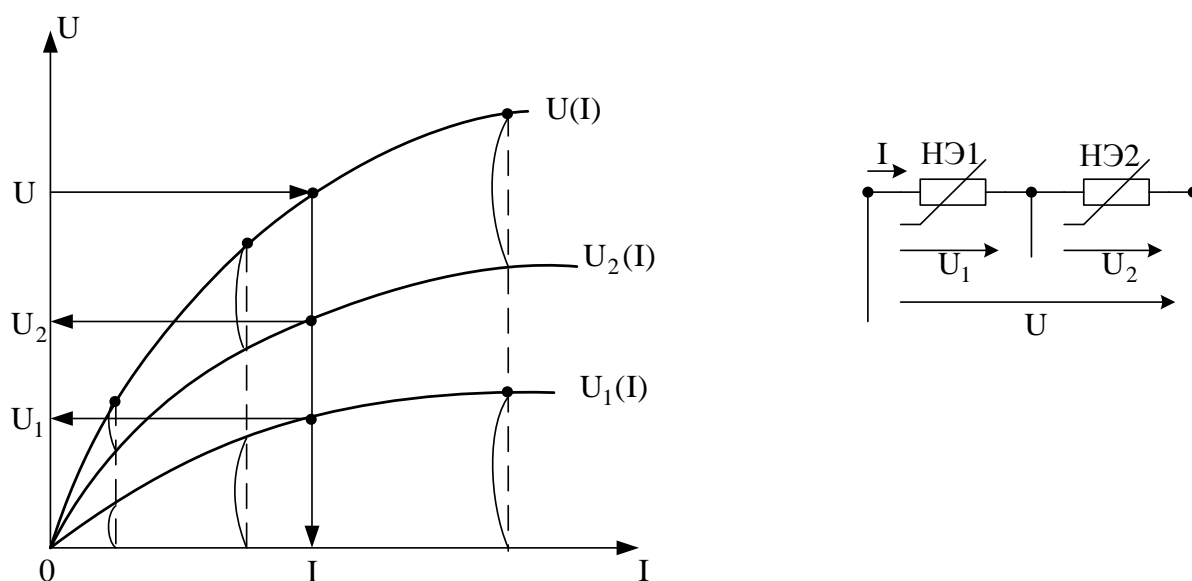


Рисунок 11.3

Пусть заданы ВАХ НЭ и общее напряжение U . Определим ток I и напряжение на каждом элементе U_1 и U_2 .

Поскольку при последовательном соединении ток на участках одинаков, а по второму закону Кирхгофа $U = U_1 + U_2$, то, задаваясь различными значениями токов, графически суммируем напряжения НЭ для получения ВАХ всей цепи. Затем, по заданной величине U , находим рабочую точку на общей ВАХ и на характеристиках НЭ.

2) Параллельное соединение элементов (рис. 11.4).

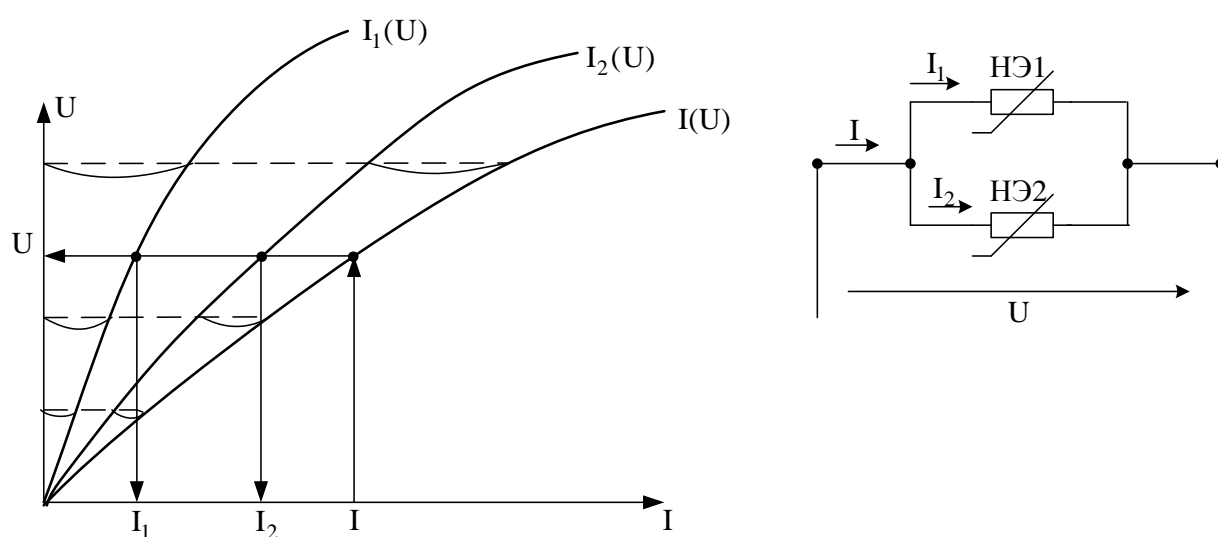


Рисунок 11.4

Пусть заданы ВАХ НЭ и общий ток I . Определим U и токи ветвей I_1, I_2 .

Поскольку при параллельном соединении напряжение на ветвях одинаковое, а по первому закону Кирхгофа $I = I_1 + I_2$, то для получения ВАХ всей цепи следует, задаваясь напряжением, графически суммировать токи.

Затем, по заданной величине I , находим рабочую точку на общей ВАХ и на характеристиках ветвей.

3) Смешанное соединение (рис. 11.5).

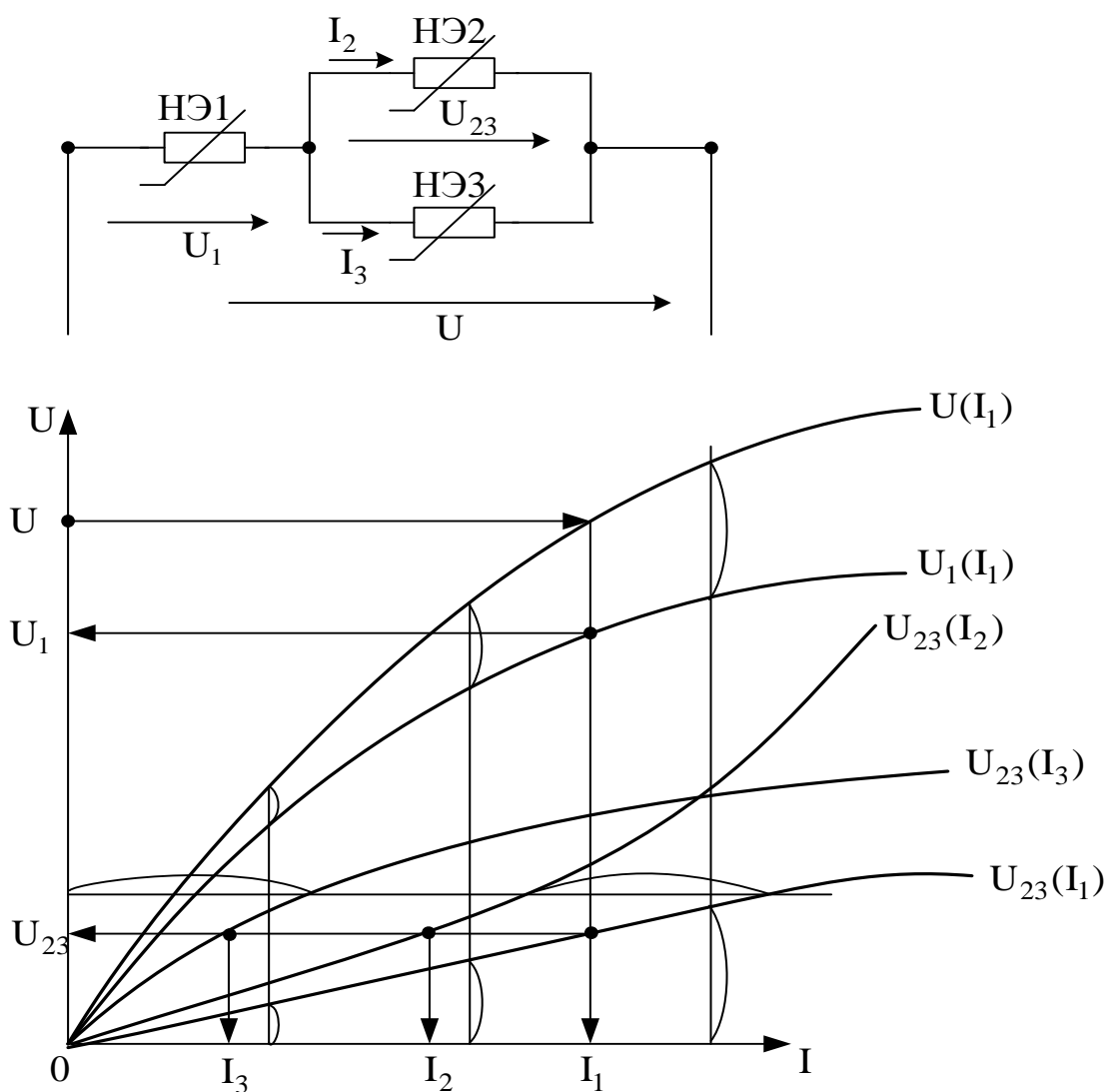


Рисунок 11.5

Пусть известны ВАХ НЭ и общее напряжение U . Определим токи и напряжения на всех элементах схемы. Сначала построим ВАХ параллельного соединения $U_{23}(I_1)$, суммируя I_2 и I_3 , а затем, ВАХ всей цепи, как последовательного соединения $U(I_1)$, суммируя U_{23} и U_1 .

По заданному значению U находим рабочую точку на общей ВАХ и общий ток I_l , при этом токе на характеристиках $U_1(I_l)$ и $U_{23}(I_l)$ находим напряжения на участках U_1 и U_{23} , а по значению U_{23} токи I_2 и I_3 по соответствующим характеристикам.

Графоаналитический метод расчета сложной цепи, содержащей один нелинейный элемент

Представим цепь как сколь угодно сложный активный двухполюсник, нагрузкой которого служит нелинейный резистор. (рис. 11.6)

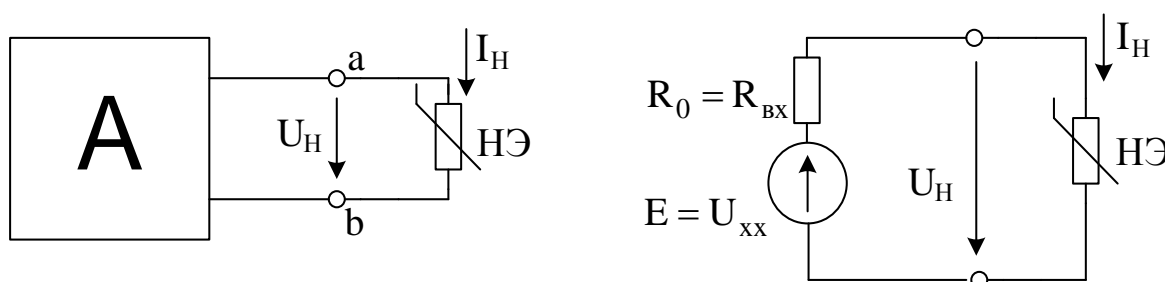


Рисунок 11.6

Согласно теореме об эквивалентном генераторе, активный двухполюсник можно заменить ЭДС, равной напряжению холостого хода, с внутренним сопротивлением, равным входному сопротивлению соответствующего пассивного двухполюсника. Внешняя характеристика такого активного двухполюсника – прямая, соединяющая точки U_{xx} и $I_{кз} = U_{xx}/R_{вх}$.

Поскольку напряжение на выходе активного двухполюсника является одновременно напряжением нелинейного элемента, то на пересечении внешней характеристики активного двухполюсника и ВАХ НЭ находится рабочая точка, определяющая режим работы НЭ (рис. 11.7). Токи и напряжения остальной линейной цепи определяются с помощью законов Кирхгофа.

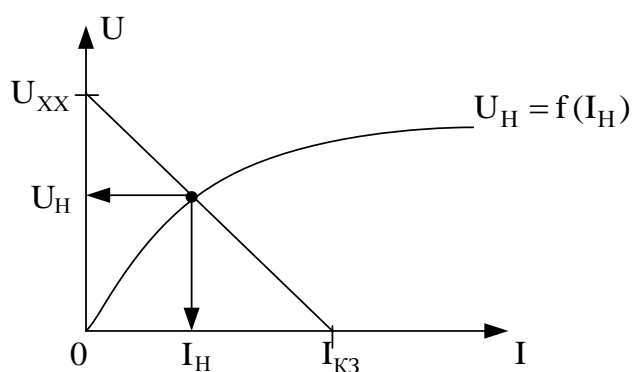


Рисунок 11.7

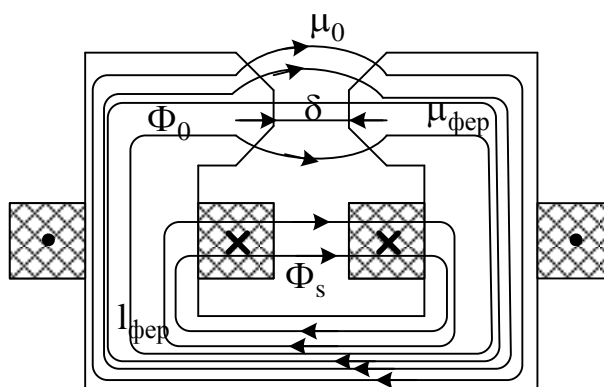
12. Магнитные цепи при постоянных магнитных потоках

Магнитной цепью называется устройство, предназначенное для создания и использования магнитного потока.

Чтобы сконцентрировать магнитное поле в небольшом объеме, магнитные цепи изготавливают из материалов, которые имеют способность хорошо проводить магнитный поток, т.е. обладают высокой магнитной проницаемостью. Такими материалами являются ферромагнитные материалы (железо, кобальт, никель и их сплавы).

В электрических цепях проводимость проводника и изоляции отличается примерно в 10^{20} раз, поэтому в них можно считать, что ток протекает только по проводникам, и лишь в длинных линиях приходится считаться с токами утечки.

Относительная магнитная проницаемость ферромагнитных материалов имеет порядок $10^3 \div 10^4$. Это соотношение с проницаемостью воздуха меньше, чем в электрических цепях, поэтому в магнитных цепях довольно значительная часть магнитного потока полностью или частично замыкается по воздуху, образуя потоки рассеяния (рис. 12.1).



Φ_s — магнитный поток рассеяния; Φ_0 — основной магнитный поток; δ — рабочий воздушный зазор.

Рисунок 12.1

12.1. Основные свойства ферромагнитных материалов

Характерная особенность ферромагнитных материалов состоит в том, что их большая магнитная проницаемость непостоянна и является нелинейной и неоднозначной функцией индукции магнитного поля. Если образец из ферромагнитного материала подвергать циклическому

перемагничиванию, то связь между индукцией магнитного поля B и напряженностью магнитного поля H графически изобразится в форме предельной петли гистерезиса, отражающей неоднозначность зависимости $B = f(H)$. При различных значениях максимальной напряженности H_m можно получить семейство таких петель гистерезиса.

Основной кривой намагничивания ферромагнитного материала называется кривая, представляющая собой геометрическое место вершин предельных петель гистерезиса. Используя такую характеристику ферромагнитного материала, мы учитываем нелинейность зависимости $B = f(H)$, пренебрегая ее неоднозначностью (рис. 12.2,а). На рис. 12.2,б

изображена также зависимость $\mu = \frac{B}{\mu_0 H}$ от напряженности поля.

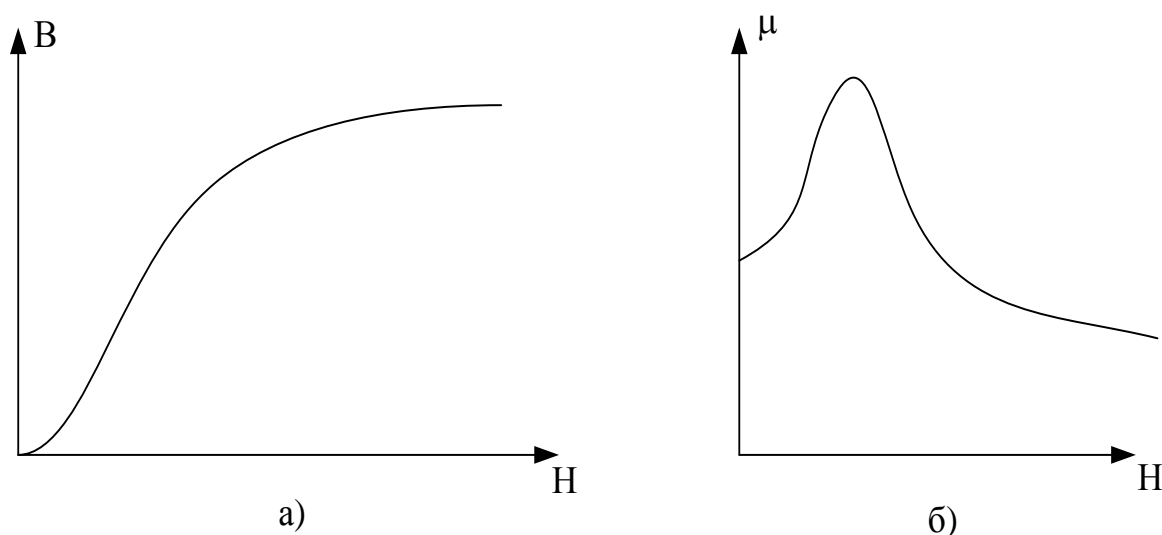


Рисунок 12.2

Строго говоря, устройства, называемые магнитными цепями, можно рассчитать с высокой точностью только на основании теории электромагнитного поля с помощью современной вычислительной техники, но такая задача очень сложна.

В ряде практических случаев достаточно произвести приближенный расчет, базирующийся на допущении о том, что потоками рассеяния можно пренебречь, т.е. на основании теории магнитных цепей.

12.2. Основные допущения, принимаемые при расчете магнитных цепей

1) Пренебрегают потоками рассеяния. Это главное допущение вносит в расчет погрешности порядка 5-10%, однако, без него невозможен расчет магнитных цепей.

2) Выделяют в магнитной цепи участки, выполненные из одного и того же материала, и вычисляют площади поперечных сечений их прямолинейных частей, пренебрегая изменением площади сечения в угловых зонах.

3) Разбивают магнитную цепь на участки с одинаковым магнитным потоком, одинаковым материалом и одинаковой площадью поперечного сечения. Считают, что на таких участках длина всех силовых линий одинакова и определяют длину средней линии.

4) При определении площади поперечного сечения магнитной цепи в воздушном зазоре учитывают явление бокового распора силовых линий в зазоре увеличением площади сечения, но само поле в зазоре считают однородным. Здесь возможны два случая при параллельности торцов, разделенных зазором:

а) размеры обоих торцов одинаковы (рис. 12.3). Тогда $S_0 = (a + \delta)(b + \delta)$ при прямоугольной форме торцов и $S_0 = \frac{\pi(d + \delta)^2}{4}$ при круглой форме торцов;

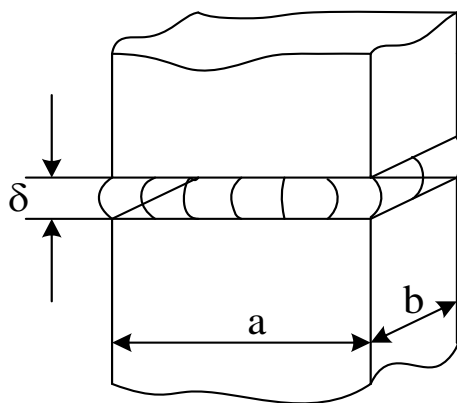


Рисунок 12.3

б) размеры одного из торцов значительно меньше другого (рис. 12.4). Тогда на каждый размер меньшего сечения добавляют 2δ . При этом $S_0 = (a + 2\delta)(b + 2\delta)$ при прямоугольной форме меньшего торца и $S_0 = \frac{\pi(d + 2\delta)^2}{4}$ при круглой форме меньшего из торцов.

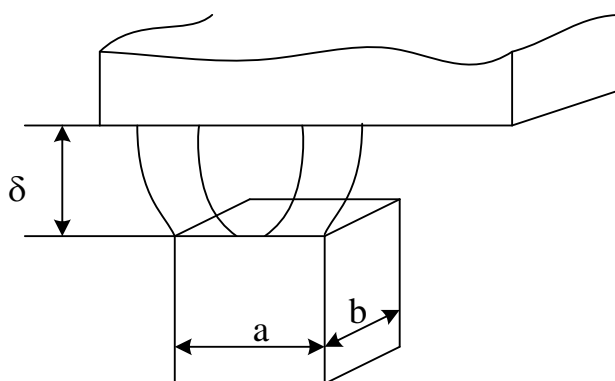


Рисунок 12.4

12.3. Основные соотношения, используемые при расчете магнитных цепей

1) Закон Ома для магнитной цепи

Пусть магнитная цепь имеет кольцевой сердечник без зазора, с площадью поперечного сечения S и длиной средней линии ℓ , на который намота обмотка с числом витков w и током I (рис. 12.5).

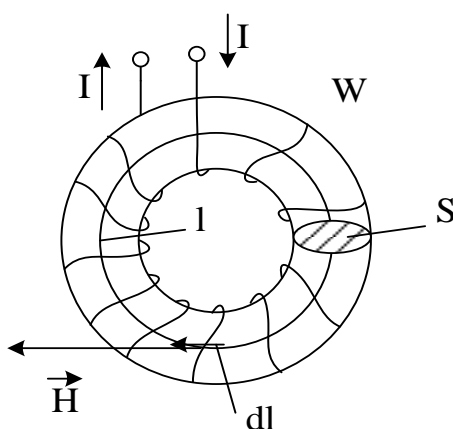


Рисунок 12.5

По закону полного тока для средней линии сердечника запишем:

$$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = H\ell = I_0 = Iw. \quad (12.1)$$

В теории магнитных цепей величина $F = Iw$ называется магнитодвижущей силой, или МДС.

Из раздела «Физические основы электротехники» известны следующие соотношения:

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0},$$

где H – напряженность магнитного поля; B – индукция магнитного поля; $\mu_a = \mu\mu_0$ – абсолютная магнитная проницаемость; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – магнитная постоянная.

В свою очередь, индукция B связана с магнитным потоком Φ :

$$B = \frac{\Phi}{S}, \text{ поэтому } H = \frac{\Phi}{\mu\mu_0 S}. \quad (12.2)$$

Подставляем (12.2) в (12.1) и получим:

$$F = \frac{\Phi \ell}{\mu\mu_0 S},$$

откуда

$$\Phi = \frac{F}{\frac{\ell}{\mu\mu_0 S}} = \frac{F}{R_m},$$

где величина

$$R_m = \frac{\ell}{\mu\mu_0 S} \quad (12.3)$$

называется магнитным сопротивлением сердечника.

Таким образом, закон Ома для магнитной цепи по форме записи подобен закону Ома для электрической цепи, хотя физическая сущность процессов совершенно разная:

$$\Phi = \frac{F}{R_m}. \quad (12.4)$$

Следует заметить, что в силу нелинейности свойств ферромагнитных материалов величины μ и R_m непостоянны и зависят от степени насыщения сердечника, т.е. от величины индукции B . Поэтому закон Ома, при заданной МДС, может быть использован лишь для качественного анализа магнитной цепи, а не для ее расчета.

2) Законы Кирхгофа для магнитных цепей

Первый закон Кирхгофа для магнитной цепи выводится на основании принципа непрерывности линий магнитного поля:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (12.5).$$

Рассмотрим узел магнитной цепи (рис. 12.6).

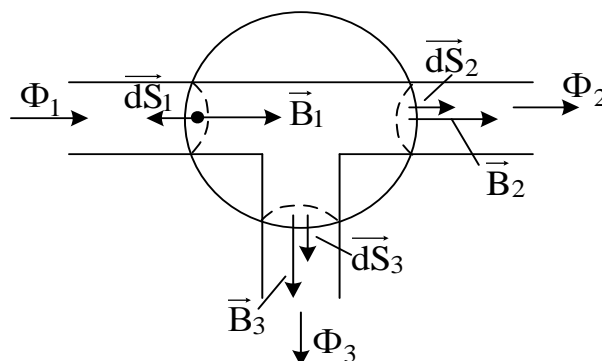


Рисунок 12.6

Ограничим его замкнутой поверхностью и применим к ней принцип непрерывности (12.5):

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_{S_1} B_1 dS_1 \cos 180^\circ + \int_{S_2} B_2 dS_2 + \int_{S_3} B_3 dS_3 = -\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0.$$

Общая форма записи первого закона Кирхгофа для магнитной цепи:

$$\sum \Phi_k = 0. \quad (12.6)$$

Формулировка этого закона звучит следующим образом.

В узле магнитной цепи алгебраическая сумма магнитных потоков равна нулю. Потоки, входящие в узел, берутся со знаком «-», а выходящие из него – со знаком «+».

Второй закон Кирхгофа для магнитных цепей.

Рассмотрим часть сложной магнитной цепи, содержащей замкнутый контур (рис. 12.7).

Зададимся произвольно направлениями магнитных потоков и токов в обмотках. Направления МДС связаны с направлениями токов в обмотках правилом правого винта.

Выберем произвольно направление обхода контура и применим для вывода уравнения закон полного тока:

$$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = H_1 \ell_1 - H_2 \ell_2 - H_4 \ell_4 - H_0 \delta + H_3 \ell_3 = I_1 w_1 - I_2 w_2 - I_3 w_3.$$

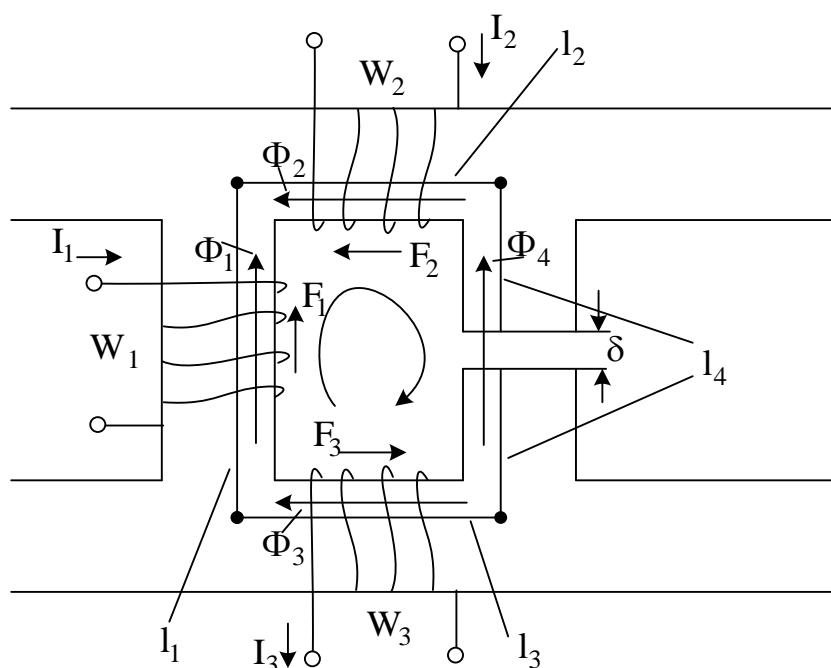


Рисунок 12.7

В общем случае следует записать:

$$\sum H_k \ell_k = \sum F_k. \quad (12.7)$$

Величину $H_k \ell_k$ называют падением магнитного напряжения, поэтому второй закон Кирхгофа формулируется следующим образом.

В контуре алгебраическая сумма падений магнитных напряжений равна алгебраической сумме магнитодвижущих сил.

Если направление магнитного потока или МДС совпадает с направлением обхода контура, величины $H_k \ell_k$ и $I_k w_k$ входят в уравнение со знаком «+»; в противном случае ставится знак «-».

12.4. Классификация магнитных цепей

По своей конфигурации магнитные цепи разделяют на две группы.

1) Неразветвленные цепи, на всех участках которых проходит один и тот же магнитный поток (без учета потоков рассеяния) (рис. 12.8,а).

2) Разветвленные магнитные цепи, имеющие узлы и несколько ветвей с различными магнитными потоками (рис. 12.8,б и в).

Различают симметричные (б) и несимметричные (в) магнитные цепи. В симметричных цепях обычно рассматривают половину магнитной цепи как неразветвленную магнитную цепь.

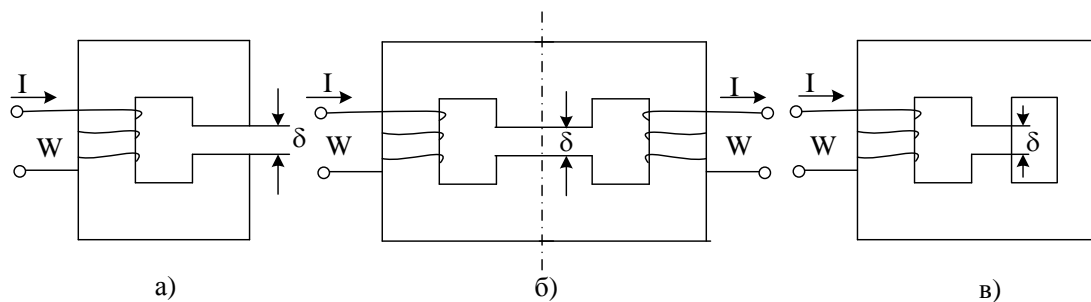


Рисунок 12.8

12.5. Типы задач расчета магнитных цепей

Различают два типа таких задач.

- 1) Прямая задача, при которой задан магнитный поток в воздушном зазоре Φ_0 и определяется МДС.
- 2) Обратная задача, при которой задана МДС, а магнитные потоки подлежат определению.

При любой постановке задачи должна быть задана геометрия магнитной цепи и основная кривая намагничивания (ОКН) материала магнитопровода.

Предварительно следует разбить магнитную цепь на участки с одинаковым магнитным потоком, постоянной площадью поперечного сечения и однородным материалом, на каждом участке определить площадь поперечного сечения и длину средней линии.

12.6. Расчет неразветвленных магнитных цепей

- 1) Прямая задача: задан Φ_0 , определить F (рис. 12.9).

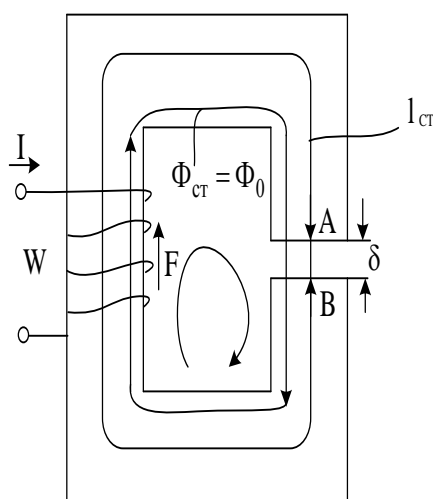


Рисунок 12.9

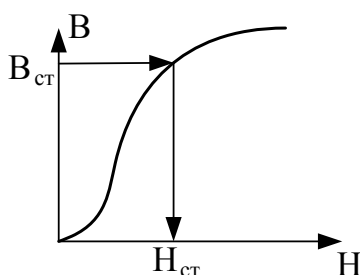


Рисунок 12.10

Поскольку магнитный поток на всех участках одинаков, можно определить индукции магнитного поля: $\Phi_{ст} = \Phi_0$; $B_{ст} = \frac{\Phi_{ст}}{S_{ст}}$; $B_0 = \frac{\Phi_0}{S_0}$. От индукции можно перейти к напряженности магнитного поля. Для этого в стали следует воспользоваться основной кривой намагничивания (ОКН) (рис. 12.10).

В воздушном зазоре $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = 0,8 \cdot 10^6 B_0$, поскольку $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$, а $1/\mu_0 \approx 0,8 \cdot 10^6 \text{ м/Гн}$. Теперь достаточно записать уравнение по второму закону Кирхгофа для контура (рис. 12.9):

$$H_{ст} \ell_{ст} + H_0 \delta = Iw = F. \quad (12.8)$$

2) Обратная задача: задана F , определить Φ_0 .

Эта задача решается методом последовательных приближений или графически.

а) Метод последовательных приближений

В уравнении (12.8) обычно $H_0 \delta \gg H_{ст} \ell_{ст}$. Поэтому в первом приближении можно допустить, что $H'_0 \delta = Iw$, откуда

$$H'_0 = \frac{Iw}{\delta}; \quad B'_0 = \frac{\mu_0 Iw}{\delta}; \quad \Phi'_0 = \frac{\mu_0 S_0 Iw}{\delta},$$

где Φ'_0 - приближенное и заведомо завышенное значение потока в зазоре.

Для первого варианта расчета берут $\Phi_{01} = (0,8 \div 0,9) \Phi'_0$ и решают прямую задачу, определяя соответствующую этому потоку расчетную МДС $F_{расч}$ и сравнивая ее с заданной величиной F . По их расхождению корректируют значение магнитного потока и повторяют расчет до достижения необходимой точности расчета.

б) Графический метод

Введем магнитное напряжение между точками A и B - U_{mAB} . Его можно выразить двумя способами:

$$U_{mAB} = H_0 \delta = f(\Phi_0); \quad (12.9)$$

$$U_{mAB} = Iw - H_{ст} \ell_{ст} = f(\Phi_{ст}). \quad (12.10)$$

Уравнение (12.10) вытекает из (12.8) и (12.9).

Построим на одном чертеже зависимость (12.9) и (12.10), называемые вебер-амперными характеристиками (рис. 12.11).

График зависимости (12.9) представляет собой прямую, проходящую через начало координат, поскольку U_{mAB} прямо пропорционально Φ_0 :

$$U_{mAB} = \frac{\Phi_0}{\mu_0 S_0} \delta.$$

График зависимости (12.10) не проходит через начало координат, поскольку при $\Phi_{ст} = 0$ имеем: $B_{ст} = 0; H_{ст} = 0$; но $U_{mAB} = Iw$.

С ростом $\Phi_{ст}$ U_{mAB} уменьшается, т.к. величина $H_{ст} \ell_{ст}$ вычитается из Iw . Задаваясь значениями $\Phi_{ст}$, определяют $B_{ст} = \Phi_{ст}/S_{ст}$, затем по ОКН находят $H_{ст}$ и вычисляют значение U_{mAB} из (12.10). Искомый график по форме напоминает ОКН, повернутую вокруг оси ординат и смещенную на отрезок Iw по оси U_{mAB} .

Рабочая точка лежит на пересечении графиков зависимостей (12.9) и (12.10), поскольку $\Phi_0 = \Phi_{ст}$.

Графики и рабочая точка показаны на рис. 12.11.

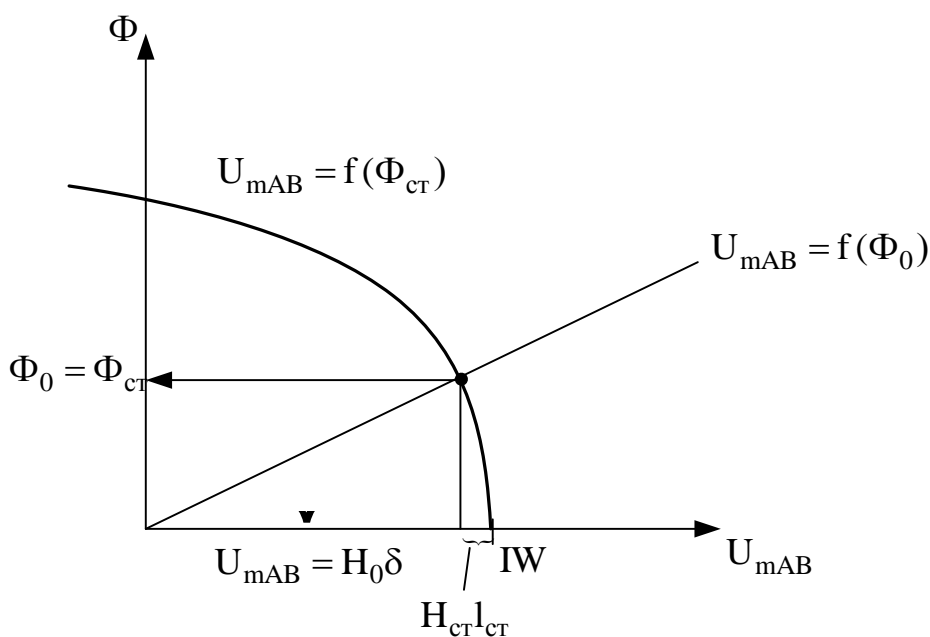


Рисунок 12.11

12.6. Расчет несимметричных разветвленных магнитных цепей

Рассмотрим магнитную цепь, изображенную на рис. 12.12. Считаем геометрию сердечника и ОКН заданными.

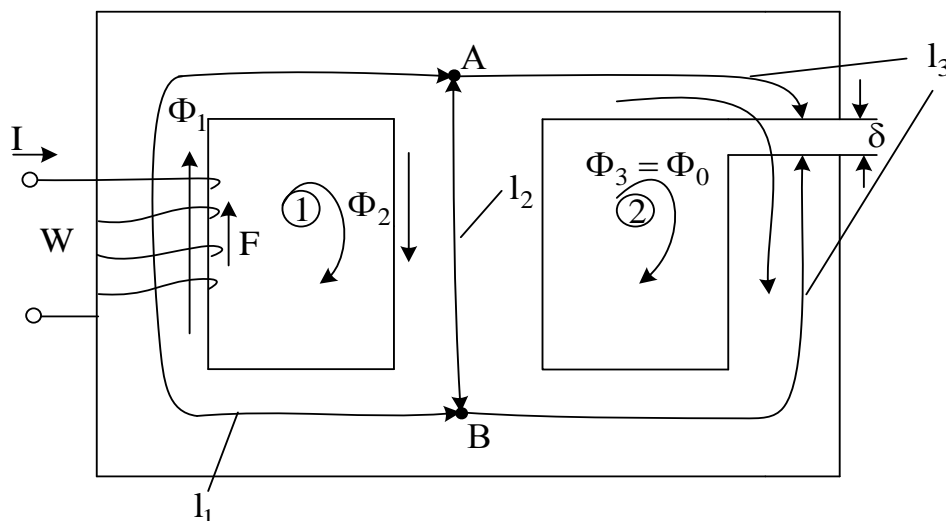


Рисунок 12.12

При любой постановке задачи нужно составить систему уравнений по законам Кирхгофа, предварительно определив направление МДС и задавшись произвольно положительными направлениями магнитных потоков, по возможности согласуя направления Φ и F .

Общее число уравнений равно числу ветвей (3), по первому закону Кирхгофа число уравнений на единицу меньше числа узлов (1), и еще два уравнения запишем по второму закону Кирхгофа.

$$\text{Для узла A:} \quad -\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0. \quad (12.11)$$

$$\text{Для контура 1:} \quad H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 = Iw \quad (12.12)$$

$$\text{Для контура 2:} \quad H_3 \ell_3 + H_0 \delta - H_2 \ell_2 = 0 \quad (12.13)$$

1) Прямая задача: задан Φ_0 , определить F .

Задача решается однократным графоаналитическим расчетом.

Зная $\Phi_0 = \Phi_3$, можно найти индукции магнитного поля в зазоре и на участке ℓ_3 :

$$B_0 = \frac{\Phi_0}{S_0}; \quad B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3}.$$

От индукции переходим к напряженностям магнитного поля: в зазоре $H_0 = 0,8 \cdot 10^6 \text{ В}_0$, на участке ℓ_3 по ОКН от B_3 переходим к H_3 (рис. 12.13). На рис. 12.13 учтено, что $\Phi_3 < \Phi_2$, т.к. магнитное сопротивление третьей ветви велико за счет зазора, а Φ_1 - самый большой поток, создаваемый МДС. Если поперечные сечения $S_1 = S_2 = S_3$, то $B_1 > B_2 > B_3$.

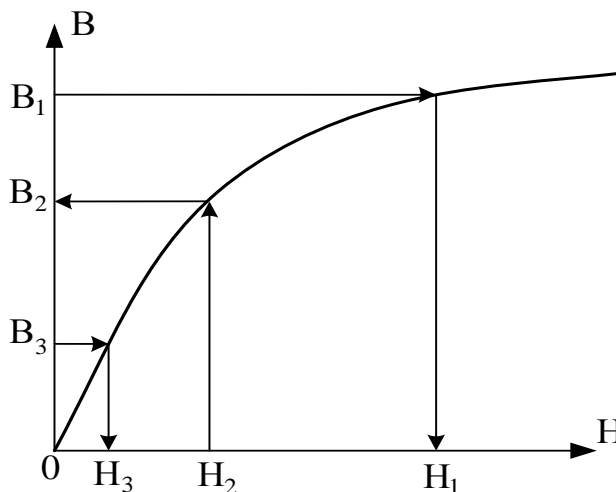


Рисунок 12.13

Подставив H_0 и H_3 в уравнение (12.13), находим H_2 :

$$H_2 = \frac{H_3 \ell_3 + H_0 \delta}{\ell_2}.$$

Пользуясь ОКН, определим B_2 , а затем $\Phi_2 = B_2 S_2$. Из уравнения (12.11) определим $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$, затем $B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$ и H_1 по ОКН. Наконец, из уравнения (12.12) находим искомую МДС:

$$F = Iw = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2.$$

2) Обратная задача: известна F , определить магнитные потоки.

Эта задача решается либо методом последовательных приближений, либо графически.

Рассмотрим графический метод расчета, для чего запишем уравнения для построения вебер-амперных характеристик. Введем в расчет магнитное напряжение U_{mAB} и выразим его из уравнений (12.12) и (12.13):

$$U_{mAB} = H_3 \ell_3 + H_0 \delta = f(\Phi_3); \quad (12.14)$$

$$U_{mAB} = H_2 \ell_2 = f(\Phi_2); \quad (12.15)$$

$$U_{mAB} = Iw - H_1 \ell_1 = f(\Phi_1). \quad (12.16)$$

Строим вебер-амперные характеристики, анализируя их качественно. На практике следует задаваться различными значениями потоков и рассчитывать индукции и напряженности, пользуясь в стали ОКН.

Характеристика, построенная по уравнению (12.14), близка к прямой, проходящей через начало координат, поскольку $H_0 \delta \gg H_3 \ell_3$ и H_0 линейно связана с магнитным потоком $\Phi_3 = \Phi_0$.

Зависимость (12.15) $U_{mAB} = f(\Phi_2)$ по форме напоминает кривую намагничивания, т.к. $\Phi_2 = B_2 S_2$, $U_{mAB} = H_2 \ell_2$, а B_2 и H_2 связаны ОКН.

Зависимость (12.16) $U_{mAB} = f(\Phi_1)$ подобна ОКН, повернутой вокруг оси и смещенной на отрезок Iw по оси магнитных напряжений.

Все характеристики представлены на рис. 12.14

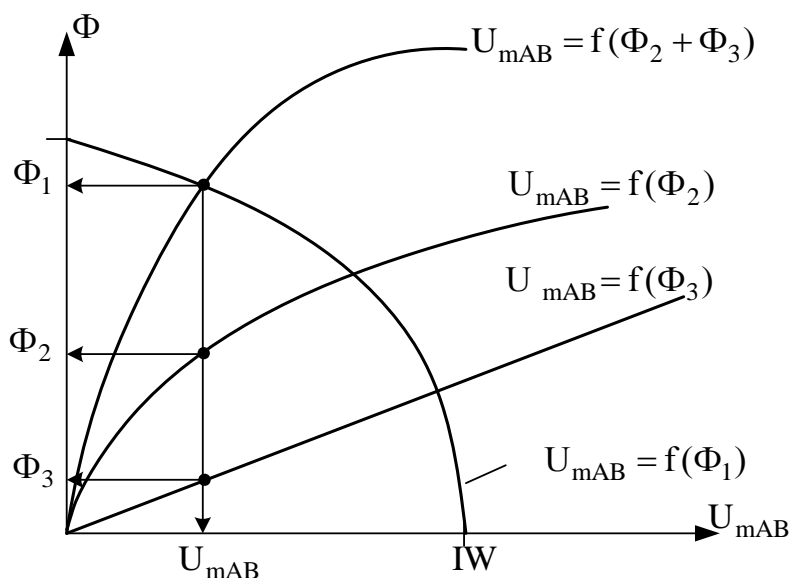


Рисунок 12.14

Чтобы на всех кривых найти рабочую точку, необходимо использовать уравнение по первому закону Кирхгофа, согласно которому $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$. Поэтому сложим ординаты кривых (12.14) и (12.15) и найдем точку пересечения суммарной кривой с кривой (12.16). Это и есть рабочая точка, определяющая истинное значение U_{mAB} и магнитных потоков.

При наличии нескольких встречно направленных МДС, кривые могут располагаться и в других квадрантах, а магнитные потоки могут оказаться отрицательными, что означает несоответствие их истинных направлений

условным положительным направлениям, выбранным при записи уравнений по законам Кирхгофа.

Подобные задачи можно также решать методом последовательных приближений, однако, здесь этот метод не рассматривается.

13. Нелинейные электрические цепи переменного тока

Нелинейные элементы в цепях переменного тока применяются чрезвычайно широко. Большинство электротехнических устройств с различными нелинейными элементами работают именно на переменном токе.

Расчет цепей переменного тока, содержащих нелинейные элементы (НЭ), усложняется тем, что при переменном токе часто нельзя ограничиваться исследованием статических характеристик НЭ, пригодных при низких частотах, а нужно учитывать изменение этих характеристик во времени в зависимости от скорости изменения тока и напряжения.

Эти особенности характеристик НЭ при переменном токе крайне затрудняет расчет и исследование нелинейных цепей.

Наличие НЭ в электрической цепи приводит к искажению формы кривой тока при синусоидальном напряжении и возникновению существенно новых явлений, на которых основывается принцип действия различных устройств.

Например, такие явления, как выпрямление и стабилизация напряжения, умножение и деление частоты, усиление мощности, преобразование различных сигналов, получение модулированных колебаний различной формы и др., основаны на принципиально нелинейных эффектах.

Поскольку электронным и ионным приборам посвящен специальный курс, то из всего разнообразия НЭ цепей переменного тока мы рассмотрим лишь электрические цепи, содержащие устройства с ферромагнитными сердечниками, или цепи со сталью.

13.1. Потери в стали при переменных магнитных потоках

В устройствах переменного тока, содержащих элементы с ферромагнитным сердечником, возникают потери энергии в сердечниках при периодическом изменении магнитного потока в них. Эти потери складываются из потерь на вихревые токи и на гистерезис.

Потери на гистерезис пропорциональны площади петли гистерезиса. Электротехнические стали, применяемые при конструировании электрических машин и аппаратов переменного тока, имеют узкую петлю гистерезиса и называются магнитомягкими сталями.

Для определения потерь на гистерезис обычно используется эмпирическая формула Штейнмеца:

$$P_{\Gamma} = \eta f B_m^n V, \quad (13.1)$$

где η - коэффициент, зависящий от материала; f - частота; B_m - максимальная индукция магнитного поля в сердечнике; V - объем сердечника.

При $B_m < 1 \text{ Тл}$ $n = 1,6$; при $B_m > 1 \text{ Тл}$ $n = 2$.

Потери на вихревые токи определяются следующим образом:

$$P_B = \xi f^2 B_m^2 V, \quad (13.2)$$

где коэффициент ξ зависит от сорта стали.

Для уменьшения этих потерь сердечник выполняется шихтованным, т.е. набирается из отдельных изолированных пластин. Наличие изоляции уменьшает площадь поперечного сечения сердечника и учитывается коэффициентом заполнения:

$$S_{\text{ст}} = a \cdot b \cdot k_{\text{зап}},$$

где a, b – размеры прямоугольного сечения; $k_{\text{зап}} = 0,9 \div 0,95$.

Таким образом, суммарные потери в стали

$$P_{\text{ст}} = P_{\Gamma} + P_B. \quad (13.3)$$

При наличии потерь в стали сердечника увеличивается активная мощность, потребляемая из сети катушкой, навитой на этот сердечник:

$$P = P_{\text{м}} + P_{\text{ст}}, \quad (13.4)$$

где $P_{\text{м}} = RI^2$ - потери в меди, т.е. в проводе обмотки.

За счет потерь в стали, увеличивается эквивалентное активное сопротивление цепи:

$$R_{\text{э}} = \frac{P}{I^2} = R + \frac{P_{\text{ст}}}{I^2} > R \text{ при постоянном токе.}$$

Обычно в справочниках задаются удельные потери в стали при индукции в 1 Тл и определенной частоте, приходящиеся на 1 кг стали.

Тогда потери в стали вычисляются по формуле:

$$P_{\text{ст}} = P_{1/50} \cdot B_m^2 G,$$

где $P_{1/50}$ - удельные потери при $B_m = 1 \text{ Тл}$ и $f = 50 \text{ Гц}$; G - вес сердечника.

13.2. Катушка с ферромагнитным сердечником.

Форма кривой тока при синусоидальном напряжении

Рассмотрим обмотку, состоящую из w витков и навитую на сердечник из ферромагнитного материала; к которой приложено синусоидальное напряжение (рис.13.1).

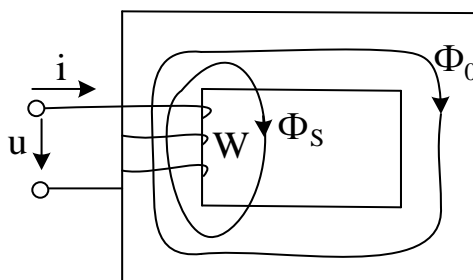


Рисунок 13.1

Наличие ферромагнитного сердечника приводит к значительному увеличению индуктивности катушки по сравнению с индуктивностью такой же катушки без сердечника, поскольку магнитное сопротивление сердечника значительно меньше магнитного сопротивления воздуха за счет высокой магнитной проницаемости стали, и одна и та же магнитодвижущая сила создаст в сердечнике значительно больший магнитный поток, чем в воздухе.

Поэтому катушки со стальными сердечниками (дрессели) применяются во всех устройствах, где необходимы большие индуктивности.

При наличии стального сердечника изменяются соотношения между током и напряжением катушки.

Это вызвано тем, что индукция B и напряженность H в сердечнике связаны нелинейной зависимостью (кривая намагничивания или петля гистерезиса), вследствие чего индуктивность катушки со стальным сердечником непостоянна и нелинейно зависит от напряжения. Следовательно, цепь, содержащая катушку с ферромагнитным сердечником, является нелинейной цепью и не может быть описана линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Под действием приложенного синусоидального напряжения в катушке появится переменный ток, а в сердечнике – переменный магнитный поток. Напряжение источника будет расходоваться на падение напряжения в активном сопротивлении обмотки и на преодоление ЭДС, индуцированной в катушке:

$$u = Ri + \frac{d\Psi}{dt}. \quad (13.5)$$

Значительная часть магнитного потока замыкается в сердечнике и называется основным магнитным потоком Φ_0 , а часть линий магнитного поля замыкается по воздуху и образует поток рассеяния Φ_s . Картина поля в общем

случае сложна, однако, $\Phi_S \ll \Phi_0$ и в первом приближении потоком рассеяния можно пренебречь.

Будем также считать, что $Ri \ll \frac{d\Psi}{dt}$, что справедливо в большинстве случаев, встречающихся на практике.

При таких допущениях приложенное напряжение будет полностью компенсироваться ЭДС, индуктируемой в катушке основным потоком:

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = -e.$$

Пусть $u = U_m \cos \omega t$; тогда

$$\Psi = \int u dt = \int U_m \cos \omega t dt = \frac{U_m}{\omega} \sin \omega t = \Psi_m \sin \omega t,$$

т.е. потокосцепление изменяется по синусоидальному закону и отстает от напряжения по фазе на 90° , а напряжение и ЭДС находятся в противофазе.

Поскольку $\Psi = w\Phi_0 = wBS$, то Ψ и B пропорциональны друг другу.

По закону полного тока $H\ell = iw$, откуда $i = \frac{H\ell}{w}$, т.е. ток и напряженность H также пропорциональны друг другу.

Поэтому зависимость $\Psi = f(i)$ будет подобна зависимости $B = f(H)$, т.е. представляет собой петлю гистерезиса (рис.13.2).

Построим кривую тока в катушке при синусоидальном законе изменения потокосцепления.

Намагничиванию (росту Ψ) соответствует нижняя, а размагничиванию (уменьшению Ψ) – верхняя часть петли гистерезиса.

При $\Psi = 0$ $i = i_0$; Ψ_l соответствует i_1 , $\Psi_m - I_m$, при $\Psi = \Psi_0$ $i=0$, при $\Psi = 0$ $i = -i_0$, и т.д.

Таким образом, за счет нелинейной и неоднозначной зависимости между потокосцеплением и током в катушке со стальным сердечником при синусоидальном законе изменения напряжения и потокосцепления ток несинусоидален, причем, чем больше насыщен сердечник при Ψ_m , тем сильнее кривая тока отличается от синусоиды.

Моменты прохождения тока и магнитного потока через максимум совпадают, а через нулевые значения ток проходит раньше, чем поток.

Если разложить кривую тока в гармонический ряд и выделить основную (первую) гармонику, то она будет опережать поток на некоторый угол α_τ , называемый углом гистерезисного запаздывания.

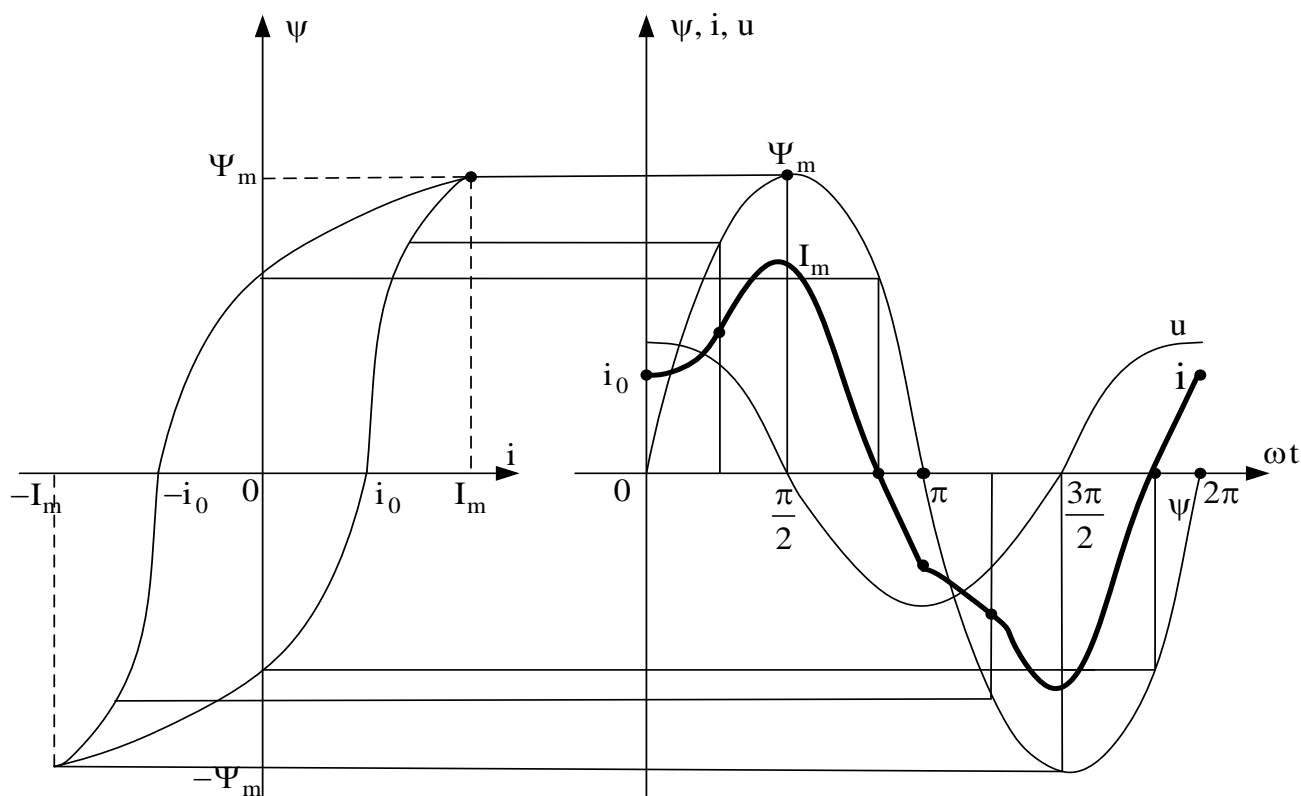


Рисунок 13.2

Благодаря симметрии петли гистерезиса, кривая тока симметрична относительно оси абсцисс i , следовательно, содержит только нечетные гармоники. Наиболее резко в ней выражена третья гармоника.

Уравнение катушки с ферромагнитным сердечником

Как было записано ранее для мгновенных значений,

$$u = Ri + \frac{d\Psi}{dt}.$$

При этом полное потокосцепление состоит из двух частей:

$$\Psi = \Psi_s + \Psi_0, \quad (13.6)$$

где Ψ_s - потокосцепление, обусловленное потоком рассеяния.

Картина поля потока рассеяния сложна, но он проходит в воздухе, и обусловленное им потокосцепление пропорционально току:

$$\Psi_s = L_S i,$$

величина L_S называется индуктивностью рассеяния катушки, она составляет малую, но постоянную часть общей индуктивности катушки. В то же время

$$\Psi_0 = w\Phi_0,$$

поскольку основной поток Φ_0 сцеплен со всеми витками катушки, но он нелинейно связан с током; Ψ_0 обуславливает большую, но непостоянную и нелинейную часть индуктивности катушки.

$$\text{Тогда } \Psi = L_S i + w\Phi_0 \text{ и } u = Ri + L_S \frac{di}{dt} + w \frac{d\Phi_0}{dt}.$$

Здесь $w \frac{d\Phi_0}{dt} = -e_0$ - часть напряжения, затрачиваемая на преодоление

ЭДС, индуктируемой в катушке основным потоком.

Таким образом, имеем следующее уравнение катушки с сердечником для мгновенных значений:

$$u = Ri + L_S \frac{di}{dt} - e_0. \quad (13.7)$$

Величина $Ri + L_S \frac{di}{dt} \ll -e_0$ в большинстве реальных случаев. Поэтому замена реальной несинусоидальной кривой тока эквивалентной синусоидальной не внесет существенной погрешности, однако даст возможность использовать метод комплексных амплитуд для расчета цепей, содержащих катушку с сердечником.

При синусоидальном напряжении e_0 тоже практически синусоидальна. Эквивалентная синусоида тока имеет то же действующее значение, что и истинный ток, а угол сдвига фаз между током и напряжением выбирается из условия сохранения реальных потерь в катушке, т.е. потерь в меди и потерь в стали:

$$P = P_M + P_{ст} = UI \cos \varphi; \quad \varphi = \arccos \frac{P}{UI}. \quad (13.8)$$

Тогда уравнение катушки с сердечником можно записать в комплексной форме:

$$\underline{U} = R\underline{I} + j\omega L_S \underline{I} - \underline{E}_0. \quad (13.9)$$

Величина $\omega L_S = X_S$ называется индуктивным сопротивлением рассеяния.

$$\underline{U} = R\underline{I} + jX_S \underline{I} - \underline{E}_0. \quad (13.10)$$

Следует помнить, что $\underline{E}_0 = -j\omega\Phi_0$; действующее значение этой ЭДС $E_0 = \omega\Phi_0 = 2\pi f\omega \frac{\Phi_{0m}}{\sqrt{2}} = 4,44 f\omega\Phi_{0m}$ при синусоидальном законе изменения Φ_0 .

В общем случае $E_0 = 4k_f f\omega\Phi_{0m}$, где k_f - коэффициент формы кривой магнитного потока.

Векторная диаграмма катушки с ферромагнитным сердечником (рис.13.3)

Начнем построение с вектора основного потока Φ_0 . Обусловленная этим потоком ЭДС, отстает от него по фазе на 90° . Наличие потерь в стали приводит к тому, что ток не совпадает по фазе с основным потоком, а опережает его на угол α , называемый углом потерь.

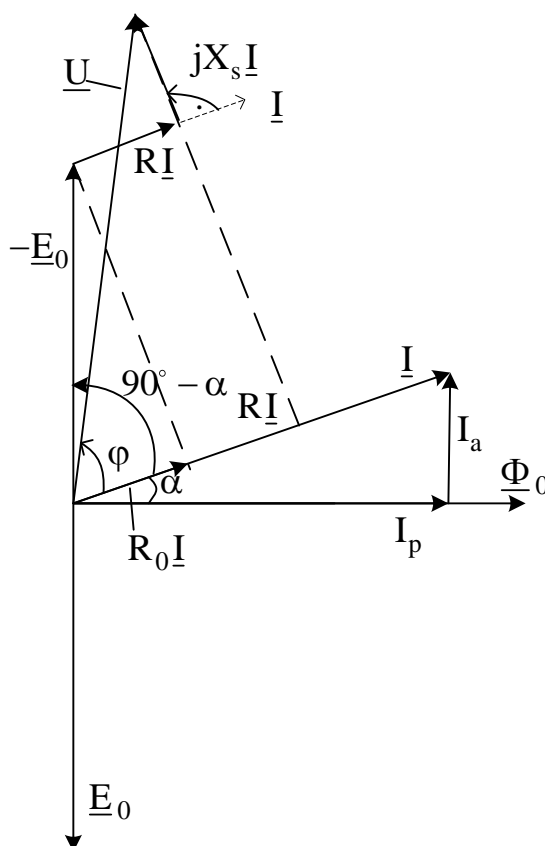


Рисунок 13.3

Разложим ток на две составляющих – реактивную составляющую I_p , называемую намагничивающим током и создающую основной поток, и активную составляющую I_a , называемую током потерь.

Вектор $-\underline{E}_0$ опережает $\underline{\Phi}_0$ на 90° . Вектор $\underline{R}\underline{I}$ совпадает по фазе с током, а вектор $jX_s\underline{I}$ опережает ток по фазе на 90° .

В результате геометрического суммирования векторов $-\underline{E}_0$, $R\underline{I}$ и $jX_s\underline{I}$ получаем вектор напряжения \underline{U} , от которого ток отстает по фазе на угол φ .

Следует отметить, что угол магнитного запаздывания $\alpha > \alpha_r$, т.к. учитывает не только потери на гистерезис, но и потери на вихревые токи.

Из векторной диаграммы видно, что

$$U_a = U \cos \varphi = R_y I = RI + E_0 \cos(90^\circ - \alpha);$$

$$R_y = \frac{U_a}{I} = R + \frac{E_0 \cos(90^\circ - \alpha)}{I} = R + \frac{E_0 \sin \alpha}{I} \gg R$$

Составляющая $R_0 = \frac{E_0 \sin \alpha}{I}$ - часть эквивалентного активного сопротивления катушки, обусловленная потерями в стали.

Схема замещения катушки с ферромагнитным сердечником

Схема замещения должна быть составлена таким образом, чтобы ее уравнение по второму закону Кирхгофа и векторная диаграмма совпадали бы с уравнением и диаграммой реальной катушки (рис. 13.4).

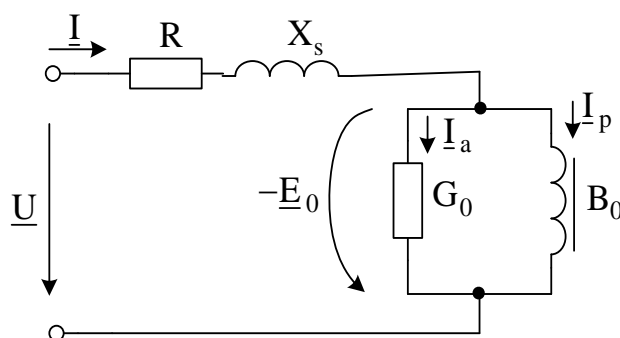


Рисунок 13.4

Если из общего напряжения вычесть падения напряжений $R\underline{I}$ и $jX_s\underline{I}$, остается напряжение $-\underline{E}_0$. На этом участке ток разветвляется на \underline{I}_a , определяющий потери в активной проводимости G_0 , равные потерям в стали, и \underline{I}_p , проходящий в реактивной проводимости B_0 , изображающей основную нелинейную часть индуктивности катушки, и создающий основной поток.

Если измерить U , I , P , R и считать, что $E_0 \approx U$, то параметры G_0 и B_0 можно определить следующим образом:

$$P_{cm} = P - RI^2; \quad I_a = \frac{P_{cm}}{U}; \quad G_0 = \frac{P_{cm}}{U^2}; \quad I_p = \sqrt{I^2 - I_a^2}; \quad B_0 = \frac{I_p}{U}.$$

Для более точного расчета параметров схем замещения необходимо измерить амплитуду основного потока Φ_{0m} .

13.3. Трансформатор с ферромагнитным сердечником

При изучении воздушного трансформатора было дано определение этого электрического аппарата. Для увеличения коэффициента связи между обмотками трансформатора их размещают на ферромагнитном сердечнике.

Трансформаторы с ферромагнитным сердечником широко применяются в технике в качестве силовых трансформаторов, т.е. для передачи больших мощностей через магнитное поле. Однако ферромагнитный сердечник обладает нелинейными характеристиками, вследствие чего трансформатор с таким сердечником является нелинейным элементом цепи переменного тока и имеет ряд принципиально новых свойств.

Основные физические процессы трансформатора и его уравнения для мгновенных значений

Пусть трансформатор имеет две обмотки с числом витков w_1 и w_2 с активными сопротивлениями R_1 и R_2 , расположенные на общем сердечнике (рис.13.5).

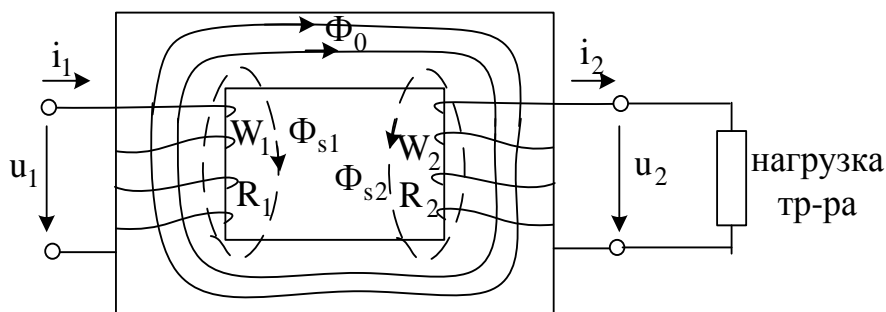


Рисунок 13.5

Если к первой обмотке трансформатора приложить переменное напряжение u_1 , то в этой обмотке появится переменный ток i_1 и возникает переменный магнитный поток, который частично будет замыкаться по воздуху (поток рассеяния первичной обмотки Φ_{s1}), а основная его часть будет замыкаться по сердечнику (основной магнитный поток Φ_0), пронизывая также и витки вторичной обмотки.

Переменный магнитный поток Φ_0 индуцирует в первичной обмотке ЭДС самоиндукции e_{01} , а во вторичной обмотке – ЭДС взаимной индукции e_{02} .

Если вторичная обмотка разомкнута, то на ее зажимах напряжение равно ЭДС, индуцируемой в ней основным потоком.

Если ко вторичной обмотке подключить нагрузку, то под действием ЭДС взаимной индукции в ней появится переменный ток i_2 , а напряжение u_2 на нагрузке будет отличаться от e_{02} . Ток i_2 также создаст переменный магнитный поток, который, согласно принципу Ленца, направлен против потока первичной обмотки. Поток, созданный током i_2 , частично замыкается по воздуху (поток рассеяния вторичной обмотки Φ_{s2}), а большая его часть замыкается по сердечнику.

Результирующий основной магнитный поток должен был бы уменьшиться. Однако ток первичной обмотки при этом возрастает, т.к. из первичной обмотки во вторичную через магнитное поле передается мощность нагрузки. При этом увеличивается и часть основного потока, создаваемого током i_1 , а суммарный поток в сердечнике остается примерно на том же уровне, что и в режиме холостого хода.

Разбивка основного магнитного потока на составляющие, созданные первичным и вторичным токами, является искусственной, но упрощает анализ процессов в трансформаторе. В действительности существует общий основной магнитный поток.

Потокоцепление обеих обмоток можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \Psi_{s1} + \Psi_{01} = L_{s1}i_1 + w_1\Phi_0; \\ \Psi_2 &= \Psi_{s2} + \Psi_{02} = L_{s2}i_2 + w_2\Phi_0.\end{aligned}\quad (13.11)$$

Здесь L_{s1} , L_{s2} - индуктивности рассеяния первичной и вторичной обмоток.

Напряжение, приложенное к первичной обмотке, расходуется на падение напряжения в ее активном сопротивлении и на преодоление ЭДС, индуцированных в этой обмотке потоком рассеяния и основным потоком:

$$u_1 = R_1i_1 + \frac{d\Psi_1}{dt} = R_1i_1 + L_{s1}\frac{di_1}{dt} + w_1\frac{d\Phi_0}{dt}. \quad (13.12)$$

Во вторичной обмотке формально источника нет, а фактически источником является ЭДС, индуцируемая в ней основным потоком, и она расходуется на падение напряжения в ее активном сопротивлении, на преодоление ЭДС индуцируемой потоком рассеяния вторичной обмотки, и на поддержание напряжения на нагрузке:

$$0 = R_2i_2 + \frac{d\Psi_2}{dt} = R_2i_2 + L_{s2}\frac{di_2}{dt} + w_2\frac{d\Phi_0}{dt} + u_2;$$

$$-w_2 \frac{d\Phi_0}{dt} = R_2 i_2 + L_{s2} \frac{di_2}{dt} + u_2. \quad (13.13)$$

Уравнения (13.12) и (13.13) являются уравнениями электрического равновесия трансформатора. В них обозначим:

$$w_1 \frac{d\Phi_0}{dt} = -e_{01}; \quad -w_2 \frac{d\Phi_0}{dt} = e_{02}.$$

Эти два уравнения должны быть дополнены третьим уравнением – уравнением магнитного равновесия, или уравнением магнитодвижущих сил (МДС).

Как было сказано выше, основной магнитный поток создается токами обеих обмоток, потому суммарная МДС, действующая в сердечнике, равна алгебраической сумме МДС обмоток $i_1 w_1 + i_2 w_2$.

Представим условно, что суммарная МДС создается некоторым током, протекающим в первичной обмотке и создающим МДС, равную этой алгебраической сумме. Этот ток называется намагничивающим током и обозначается i_0 :

$$i_1 w_1 + i_2 w_2 = i_0 w_1. \quad (13.14)$$

В действительности нет отдельного тока i_0 в первичной обмотке, i_0 представляет собой расчетный ток, составляющий часть тока первичной обмотки, расходуемую на создание основного потока и покрытие потерь в стали.

Ток i_0 составляет часть i_1 , т.е. $i_0 < i_1$, т.к. вторичная обмотка оказывает размагничивающее действие и поэтому суммарная МДС меньше МДС первичной обмотки.

Величина основного магнитного потока трансформатора мало меняется при работе его в режимах от холостого хода до номинальной нагрузки, а, следовательно, и ток i_0 почти не меняется в этих режимах.

При холостом ходе, когда вторичная обмотка разомкнута и $i_2 = 0$, поток создается только током $i_1 = i_0$. Таким образом, можно считать, что намагничивающий ток при номинальной нагрузке равен току первичной обмотки в режиме холостого хода.

Итак, для мгновенных значений имеем такие три уравнения трансформатора:

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_{s1} \frac{di_1}{dt} - e_{01}; \\ e_{02} = R_2 i_2 + L_{s2} \frac{di_2}{dt} + u_2; \\ i_0 w_1 = i_1 w_1 + i_2 w_2. \end{cases} \quad (13.15)$$

Уравнения трансформатора в комплексной форме

Если к катушке с ферромагнитным сердечником приложено синусоидальное напряжение, ток в катушке несинусоидален.

В трансформаторе такое же явление наблюдается в режиме холостого хода.

Если же трансформатор включен под нагрузку, то при синусоидальном приложенном напряжении u_1 , пренебрегая $R_1 i_1$ и $L_{s1} \frac{di_1}{dt}$, можно считать e_{01} синусоидальной, а, следовательно, синусоидален и основной поток, создающий синусоидальные ЭДС e_{01} и e_{02} . Тогда синусоидально и напряжение на нагрузке u_2 , а, значит, если сопротивление нагрузки линейно, то ток i_2 также практически синусоидален.

Намагничивающий ток i_0 , идущий на создание синусоидального магнитного потока в стальном сердечнике, несинусоидален, но, поскольку он мал, то ток i_1 также можно считать практически синусоидальным. Замена тока i_0 эквивалентной синусоидой не внесет существенной погрешности в расчет, однако это позволит записать уравнения трансформатора (13.15) в комплексной форме:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_{s1} \underline{I}_1 - \underline{E}_{01}; \\ \underline{E}_{02} = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_{s2} \underline{I}_2 + \underline{U}_2; \\ \underline{I}_0 w_1 = \underline{I}_1 w_1 + \underline{I}_2 w_2. \end{cases} \quad (13.16)$$

Обычно обозначают $\omega L_{s1} = X_{s1}$; $\omega L_{s2} = X_{s2}$.

Уравнения трансформатора для приведенных вторичных величин

В большинстве случаев числа витков первичной и вторичной обмоток сильно отличаются друг от друга.

Отношение чисел витков принято называть коэффициентом трансформации:

$$n = \frac{w_2}{w_1}.$$

Если $n > 1$, трансформатор называется повышающим, а при $n < 1$ - понижающим

При резком отличии w_1 и w_2 резко отличаются и ЭДС, индуцируемые в обмотках основным потоком:

$$\underline{E}_{01} = -j\omega w_1 \underline{\Phi}_0 \text{ и } \underline{E}_{02} = -j\omega w_2 \underline{\Phi}_0.$$

При расчете неудобно пользоваться величинами, отличающимися в десятки и сотни раз, и целесообразно величины, характеризующие вторичную обмотку, привести к числу витков первичной обмотки, т.е. пересчитать их для случая, когда числа витков обмоток одинаковы. Эти вторичные величины называются приведенными и помечаются штрихами.

Операция приведения должна быть выполнена таким образом, чтобы не изменился режим работы первичной цепи. Для этого необходимо и достаточно, чтобы МДС вторичной обмотки осталась прежней:

$$\underline{I}_2 w_2 = \underline{I}'_2 w_1.$$

В этом случае суммарная МДС также остается неизменной, а вместе с ней не изменится и основной поток. Приведенный вторичный ток

$$\underline{I}'_2 = \underline{I}_2 \frac{w_2}{w_1} = \underline{I}_2 n. \quad (13.17)$$

С изменением числа витков вторичной обмотки изменяется и наводимая в ней основным потоком ЭДС:

$$\underline{E}_{02} = -j\omega w_2 \underline{\Phi}_0; \quad \underline{E}'_{02} = -j\omega w_1 \underline{\Phi}_0 = \underline{E}_{01}.$$

Это равенство чрезвычайно облегчает расчет и построение векторной диаграммы трансформатора.

Выразим \underline{E}'_{02} через \underline{E}_{02} :

$$\frac{\underline{E}'_{02}}{\underline{E}_{02}} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{n}; \quad \underline{E}'_{02} = \frac{1}{n} \underline{E}_{02}. \quad (13.18)$$

Введем в уравнение вторичной обмотки приведенные величины, учитывая, что на основании (13.17) и (13.18), имеем:

$$\underline{I}_2 = \frac{1}{n} \underline{I}'_2; \quad \underline{E}_{02} = n \underline{E}'_{02}.$$

$$n \underline{E}'_{02} = R_2 \frac{1}{n} \underline{I}'_2 + jX_{s2} \frac{1}{n} \underline{I}'_2 + \underline{U}_2. \quad (13.19)$$

Разделим (13.19) на n :

$$\underline{E}'_{02} = \frac{1}{n^2} R_2 \underline{I}'_2 + j \frac{1}{n^2} X_{s2} \underline{I}'_2 + \frac{1}{n} \underline{U}_2.$$

Обозначим:

$$\underline{U}'_2 = \frac{1}{n} \underline{U}_2; \quad R'_2 = \frac{1}{n^2} R_2; \quad X'_{s2} = \frac{1}{n^2} X_{s2}.$$

Тогда второе уравнение трансформатора примет вид:

$$\underline{E}'_{02} = R'_2 \underline{I}'_2 + j X'_{s2} \underline{I}'_2 + \underline{U}'_2. \quad (13.20)$$

Следует обратить внимание, что при приведении вторичных величин к числу витков первичной обмотки не изменяется мощность, потребляемая нагрузкой:

$$\underline{S}'_2 = \underline{U}'_2 \underline{I}'_2{}^* = \frac{1}{n} \underline{U}_2 \cdot n \underline{I}_2{}^* = \underline{U}_2 \underline{I}_2{}^* = \underline{S}_2.$$

Преобразуем третье уравнение трансформатора, разделив его на w_1 :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 + \frac{w_2}{w_1} \underline{I}_2 = \underline{I}_0; \quad \frac{w_2}{w_1} \underline{I}_2 = n \underline{I}_2 = \underline{I}'_2; \\ \underline{I}_1 + \underline{I}'_2 = \underline{I}_0. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Таким образом, уравнения трансформатора для приведенных вторичных величин имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j X_{s1} \underline{I}_1 - \underline{E}_{01}; \\ \underline{E}'_{02} = R'_2 \underline{I}'_2 + j X'_{s2} \underline{I}'_2 + \underline{U}'_2; \\ \underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}'_2. \end{cases} \quad (13.22)$$

Векторная диаграмма трансформатора

Векторная диаграмма (рис.13.6) строится для приведенных вторичных величин согласно уравнениям (13.22).

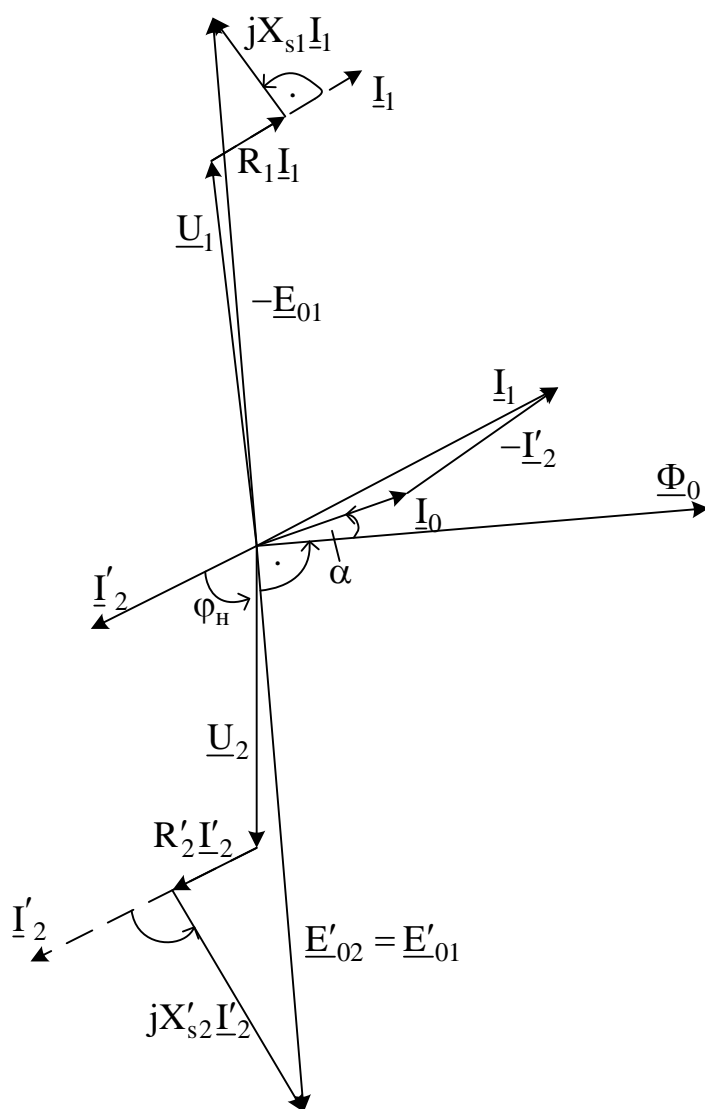


Рисунок 13.6

Удобно начинать построение с вторичных величин, в частности, с \underline{U}'_2 , направляя его вниз. Сопротивление нагрузки также надо использовать приведенным:

$$\underline{Z}'_H = \frac{1}{n^2} \underline{Z}_H = \frac{z_H}{n^2} e^{j\varphi_H}.$$

Для определенности примем индуктивный характер нагрузки ($\varphi_H > 0$), и под этим углом к \underline{U}'_2 построим ток \underline{I}'_2 .

Согласно второму уравнению (13.22), прибавим геометрически к \underline{U}'_2 векторы $\underline{R}'_2 \underline{I}'_2$ и $jX'_{s2} \underline{I}'_2$ и получим $\underline{E}'_{02} = \underline{E}'_{01}$.

Основной поток Φ_0 , которым создается эта ЭДС, опережает ее по фазе на 90° . В свою очередь, этот поток создается намагничивающим током \underline{I}_0 , который из-за наличия потерь в стали, опережает поток на угол α .

Поскольку \underline{I}_0 практически равен току холостого хода \underline{I}_{10} , а напряжение при холостом ходе $\underline{U}_{10} \approx \underline{E}_{01}$, то $\alpha = 90^\circ - \varphi_{10}$, где φ_{10} - угол сдвига фаз между током и напряжением в режиме холостого хода.

Согласно третьему уравнению (13.22) строим \underline{I}_1 , как сумму \underline{I}_0 и $-\underline{I}'_2$.

Затем по первому уравнению (13.22) к \underline{E}_{01} прибавим $R_1 \underline{I}_1$ и $jX_{s1} \underline{I}_1$ и получим \underline{U}_1 .

Схема замещения трансформатора

Схема замещения трансформатора составляется таким образом, чтобы уравнения, записанные по законам Кирхгофа, совпадали бы с основными уравнениями трансформатора (13.22).

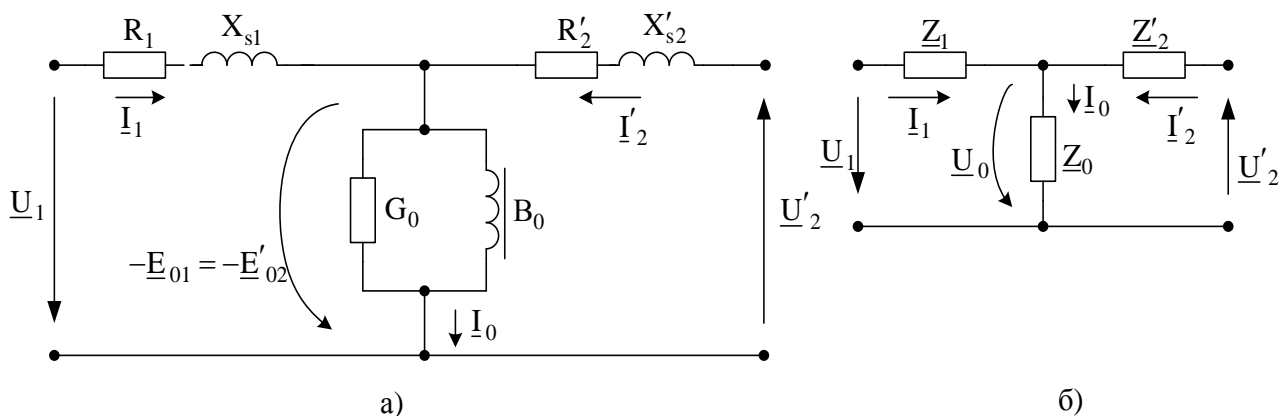


Рисунок 13.7

Однако полностью отразить соотношения в реальном трансформаторе схема замещения не может, т.к. в трансформаторе углы сдвига фаз между первичными ($\underline{U}_1, \underline{I}_1$) и соответствующими вторичными ($\underline{U}'_2, \underline{I}'_2$) величинами близки к 180° , что видно из векторной диаграммы (рис.13.6). Это обусловлено наличием магнитной связи между обмотками трансформатора. В схеме замещения элементы, изображающие обмотки, соединены электрически, а напряжение на намагничивающей ветви в одно уравнение входит со знаком «минус» ($-\underline{E}_{01}$), а во второе – со знаком «плюс» (\underline{E}'_{02}).

Поэтому в схеме замещения искусственно изменены направления \underline{I}'_2 и \underline{U}'_2 по сравнению с теми направлениями, которые имели бы место в последовательно-параллельной цепи.

Элементы R_1 и R'_2 в схеме на рис. 13.7 отражают активные сопротивления обмоток и потери в них (потери в меди), X_{s1} и X'_{s2} отражают наличие потоков рассеяния обмоток, активная проводимость намагничивающей ветви G_0 отражает наличие потерь в стали, а реактивная нелинейная проводимость B_0 - наличие основного потока в сердечнике.

В упрощенной T -образной схеме замещения на рис. 13.7,б обозначено:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{s1}; \quad \underline{Z}'_2 = R'_2 + jX'_{s2}; \quad \underline{Z}_0 = \frac{1}{G_0 - jB_0} = R_0 + jX_0.$$

Схема замещения используется для расчета трансформатора в различных режимах его работы, поэтому необходимо уметь предварительно определить параметры схемы замещения.

Паспортные данные трансформатора и их использование для определения параметров схемы замещения

Все трансформаторы промышленного производства снабжены паспортом, содержащим следующие данные:

1. Отношение номинальных напряжений U_{1H}/U_{2H} ;
2. Номинальную кажущуюся мощность S_H ;
3. Ток холостого хода $I_{10} \%$ (10-14%);
4. Потери при холостом ходе P_{10} ;
5. Напряжение при коротком замыкании e_k (7-12%);
6. Потери при коротком замыкании P_{1k} .

С их помощью определяют коэффициент трансформации

$$n = \frac{U_{2H}}{U_{1H}}$$

и номинальный первичный ток

$$I_{1H} = \frac{S_H}{U_{1H}}.$$

Стандартный опыт холостого хода проводится при номинальном первичном напряжении:

$$U_{10} = U_{1H}.$$

Ток холостого хода в паспорте задан в процентах от номинального тока первичной стороны. Поэтому

$$I_{10} = \frac{I_{10} \%}{100} I_{1H}.$$

В режиме холостого хода $I_{10} \ll I_{1H}$, падением напряжения $\underline{Z}_1 I_{10}$ и потерями в меди в этом режиме можно пренебречь. В то же время $U_{10} = U_{1H}$ можно считать равным E_{01} , а поток Φ_0 при холостом ходе такой же, как при номинальной нагрузке.

Поэтому можно считать $\underline{Z}_1 \ll \underline{Z}_0$ и $P_{10} = P_{ст}$, а

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_{10} = \frac{U_{10}}{I_{10}} e^{j\varphi_{10}},$$

где $\varphi_{10} = \arccos \frac{P_{10}}{U_{10} I_{10}}$ - угол сдвига фаз между U_{10} и I_{10} .

Силовые трансформаторы обычно конструируются таким образом, что $\underline{Z}_1 = \underline{Z}'_2$.

Стандартный опыт короткого замыкания выполняется при таком пониженном первичном напряжении

$$U_{1k} = \frac{e_k \%}{100} U_{1H},$$

при котором $I_{1k} = I_{1H}$.

Поскольку $U_{1k} \ll U_{1H}$, то при коротком замыкании можно пренебречь намагничивающим током \underline{I}_{0k} и потерями в стали, пропорциональными квадрату основного потока, составляющего примерно 10% от своей номинальной величины. Поэтому

$$\underline{I}_{1k} = -\underline{I}'_{2k} \text{ или } I_{1k} = I'_{2k};$$

потери в меди такие же, как при номинальной нагрузке: $P_m = P_{1k}$ и

$$\underline{Z}_{1k} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}'_2 = 2\underline{Z}_1 = 2\underline{Z}'_2 = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} e^{j\varphi_{1k}},$$

где $\varphi_{1k} = \arccos \frac{P_{1k}}{U_{1k} I_{1k}}$ - угол сдвига фаз между U_{1k} и I_{1k}

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}'_2 = \frac{1}{2} \underline{Z}_{1k}.$$

С помощью паспортных данных можно также определить КПД трансформатора при номинальной нагрузке, поскольку мощность, потребляемая от источника P_1 , отличается от полезной мощности нагрузки P_H только на величину суммарных потерь:

$$P_1 = P_H + P_m + P_{ст} = P_H + P_{1k} + P_{10},$$

$$\eta = \frac{P_H}{P_1} 100\% = \frac{P_H}{P_H + P_{1k} + P_{10}} 100\%.$$

КПД трансформатора довольно высок, поскольку это статический аппарат (без подвижных частей):

$$\eta > 90\%.$$

Задачи конструирования и расчета трансформаторов очень часто возникают в инженерной практике, поэтому теории трансформатора следует уделить большое внимание.

13.4. Явление феррорезонанса

В электрических цепях, содержащих реактивные катушки с ферромагнитными сердечниками и конденсаторы, наблюдаются особые явления, связанные с нелинейными свойствами этих цепей.

Рассмотрим последовательное соединение катушки с сердечником и конденсатора, к которому приложено переменное напряжение u (рис.13.8).

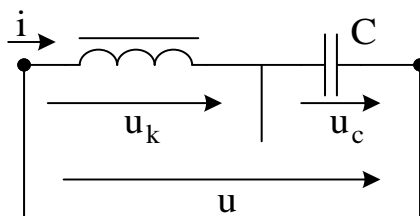


Рисунок 13.8

В общем случае катушка обладает активным сопротивлением R и индуктивностью, которую нельзя характеризовать определенным параметром, т.к. она не постоянна и нелинейно зависит от тока.

Запишем дифференциальное уравнение этой цепи:

$$u = Ri + \frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (13.23)$$

Записать $L \frac{di}{dt}$ вместо $\frac{d\Psi}{dt}$ нельзя, т.к. $L \neq \text{const}$, причем зависимость $\Psi = f(i)$ нелинейна и неоднозначна, подобна петле гистерезиса, а если пренебречь потерями в стали, подобна кривой намагничивания. Аналитически эту зависимость выразить невозможно, поэтому попытаемся качественно проанализировать работу этой цепи, обращая внимание на физическую сущность процессов.

Для упрощения задачи пренебрежем активным сопротивлением катушки R и потерями в стали. Тогда уравнение (13.23) примет вид:

$$u = \frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (13.24)$$

Поскольку цепь содержит нелинейный элемент, то при синусоидальном напряжении u ток i и напряжения на катушке и конденсаторе несинусоидальны. Заменяв их эквивалентными синусоидами, можем записать уравнение (13.24) в комплексной форме:

$$\underline{U} = \underline{U}_L - j \frac{1}{\omega C} \underline{I} \quad (13.25)$$

или

$$\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_C. \quad (13.25a)$$

Поскольку мы не учитывали активного сопротивления, то \underline{U}_L и \underline{U}_C находятся в противофазе:

$$U = |\underline{U}_L - \underline{U}_C|. \quad (13.26)$$

Используем приближенное уравнение (13.26) для дальнейшего исследования.

Построим качественно зависимости U_L , U_C , U от тока I .

По модулю $U_L = \omega \Psi$, а связь $\Psi = f(I)$ подобна кривой намагничивания, следовательно, такой же вид имеет зависимость U_L от I .

Напряжение на конденсаторе $U_C = \frac{1}{\omega C} I$ - линейная зависимость от тока. Общее напряжение U определим как модуль разности U_L и U_C (рис. 13.9).

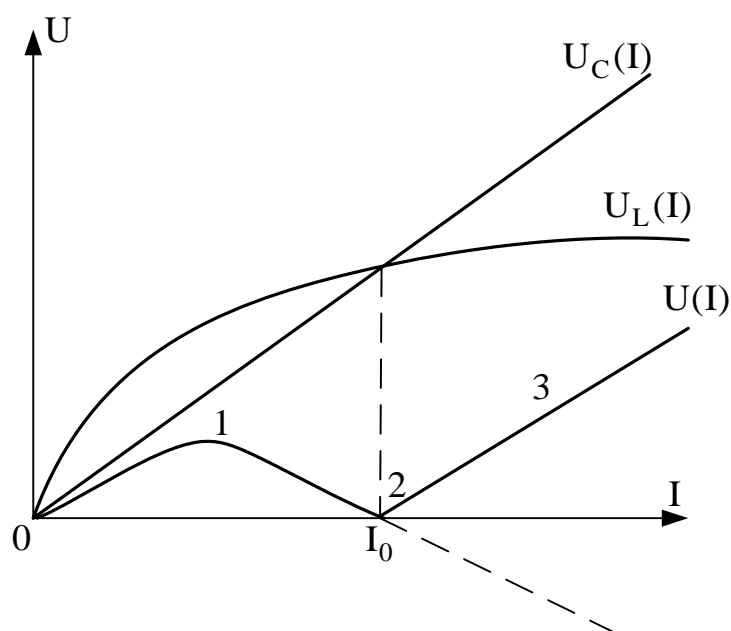


Рисунок 13.9

Вначале $U_L > U_C$, $U > 0$; при токе I_0 $U_L = U_C$; затем разность их отрицательна (пунктирная линия), модуль U - ее зеркальное отражение.

Разобьем полученную кривую на участки и проанализируем ее.

На участках 0-1 и 1-2 цепь носит индуктивный характер, а на участке 2-3 – емкостный характер.

В точке 2 при $I = I_0$ напряжения U_L и U_C компенсируют друг друга, а при последовательном соединении реактивных элементов это соответствует режиму резонанса. Но это особый вид резонанса, называемый феррорезонансом.

Известно, что в линейной цепи резонанс достигается регулированием параметров L или C , или настройкой частоты. Изменением величины напряжения или тока резонанса добиться нельзя.

В цепи, содержащей катушку с сердечником и конденсатор, феррорезонанс достигается путем изменения тока, без внешнего изменения параметров цепи. Однако фактически эквивалентная индуктивность катушки с сердечником зависит от тока, и при токе I_0 выполняется условие резонанса:

$$\omega L_{\text{э}} = \frac{1}{\omega C}.$$

Если учесть наличие активного сопротивления катушки, результирующая кривая $U = f(I)$ на рис. 13.9 не будет касаться оси токов. На рис. 13.10 принято, что активное напряжение $U_a = RI$ линейно зависит от тока, реактивное напряжение U_p взято из рис. 13.9 (пунктирная линия на рис. 13.10), результирующее напряжение

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2},$$

а его кривая касается прямой U_a только в точке феррорезонанса.

Проанализируем работу цепи при плавном увеличении и уменьшении входного напряжения U .

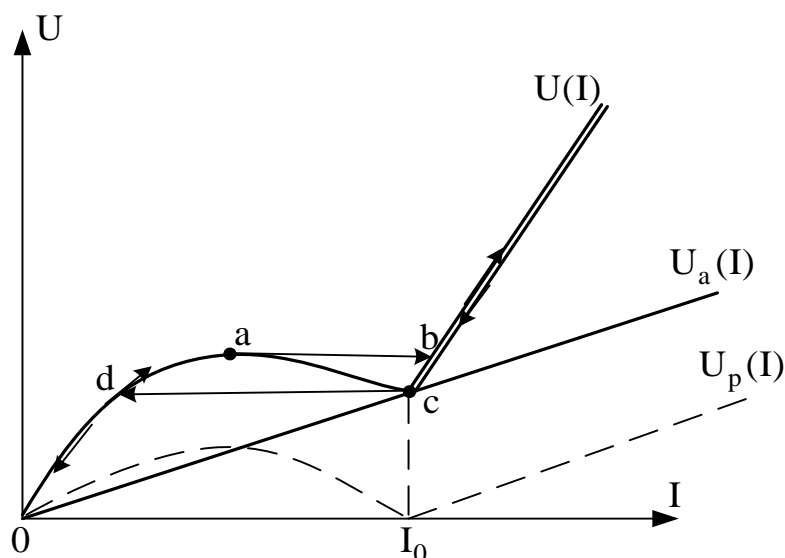


Рисунок 13.10

При плавном увеличении напряжения рабочая точка вначале будет двигаться, по участку $0a$ характеристики, а далее произойдет скачок из точки a в точку c , сопровождающийся резким увеличением тока и опрокидыванием фазы (в точке a цепь имела индуктивный характер, а в точке c приобретает емкостный характер). При дальнейшем увеличении напряжения ток меняется плавно.

При понижении напряжения рабочая точка плавно перемещается до точки c , в которой цепь носит активный характер (феррорезонанс напряжений), а затем происходит скачок из точки c в точку d , сопровождающийся резким уменьшением тока, а цепь приобретает индуктивный характер.

Ни при увеличении напряжения, ни при его уменьшении рабочая точка не попадает на падающий участок характеристики ac . Дело в том, что участок ac является областью неустойчивых режимов. На этом участке всякое случайное отклонение тока вело бы его к лавинообразному изменению до точки a или до точки c : увеличению тока соответствует уменьшение напряжения за счет роста падения напряжения в источнике; уменьшение тока ведет к уменьшению внутреннего падения и росту входного напряжения.

Если последовательно включить в цепь достаточно большое балластное сопротивление, то неустойчивые режимы работы цепи исчезнут.

Вопросы устойчивости играют существенную роль в теории нелинейных цепей.

Возможность резкого увеличения тока без существенного изменения напряжения носит название триггерного эффекта и используется для бесконтактного управления электрическими цепями.

Явления феррорезонанса наблюдаются и при параллельном соединении катушки с сердечником и конденсатора (феррорезонанс токов).

Особенности цепей, содержащих катушки с ферромагнитным сердечником и конденсаторы, используют для создания ферромагнитных стабилизаторов напряжения, служащих для поддержания постоянства напряжения на зажимах приемника при изменении напряжения питающей сети.

13.5. Методы расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях

Процессы в нелинейных электрических цепях описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, и их точное аналитическое решение возможно только для ограниченного круга задач. Основными инструментами расчета переходных процессов в нелинейных цепях на практике являются графические методы, а также методы численного решения дифференциальных уравнений.

Среди приближенных аналитических методов следует отметить метод медленно меняющихся амплитуд, методы приближенного аналитического и кусочно-линейного представления характеристик нелинейных элементов.

В последние годы с развитием вычислительной техники приобрели широкое распространение численные методы расчета переходных процессов, в которых время переходного процесса разбивается на достаточно малые промежутки Δt ; от правильного выбора шага интегрирования зависит точность решения задачи.

Одним из приближенных аналитических методов расчета переходных процессов является метод условной линеаризации уравнения цепи. Рассмотрим его на примере расчета переходного процесса, возникающего при подключении катушки с ферромагнитным сердечником к источнику синусоидального напряжения (рис. 13.11). Уравнение цепи имеет вид:

$$ri + \frac{d\Psi}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (13.27)$$

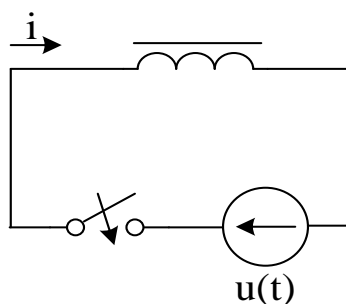


Рисунок 13.11

Чаще всего на практике $ri \ll \frac{d\Psi}{dt}$, и некоторая неточность в выражении ri вносит незначительную погрешность в решение задачи. Индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником непостоянна и нелинейно зависит от тока. Зависимость $\Psi = Li$ подобна кривой намагничивания стали, если пренебречь потерями на гистерезис.

Выразим ток через потокосцепление и подставим в уравнение (1):

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{R}{L}\Psi = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (13.28)$$

где второе слагаемое значительно меньше, чем первое, и в нем можно считать $L = \text{const}$.

Решение линеаризованного уравнения (13.28) запишется следующим образом:

$$\Psi(t) = \Psi_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + A e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Будем считать, что до включения, сердечник катушки был полностью размагничен: $\Psi(-0) = 0$.

По первому закону коммутации $\Psi(0+) = \Psi(-0)$, следовательно, $\Psi_m \sin(\psi_u - \varphi) + A = 0$, откуда $A = -\Psi_m \sin(\psi_u - \varphi)$ и

$$\Psi(t) = \Psi_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \Psi_m \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Наиболее интенсивный переходный процесс имеет место при $\psi_u = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$. Примем $\psi_u = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\Psi(t) = \Psi_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) + \Psi_m e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (13.29)$$

Поскольку индуктивность катушки с сердечником велика, то постоянная времени $\tau_L = \frac{L}{R}$ может быть сравнима с периодом синусоиды, и свободная составляющая в уравнении (13.29) затухает медленно, поэтому через полпериода после включения потокосцепление практически достигает значения $2\Psi_m$ (рис. 13.12).

Как видно из рис. 13.13, на котором изображена зависимость $\Psi = f(i)$, максимальное значение тока через полпериода после включения $i_{\text{макс}}$ может во много раз превосходить амплитуду установившегося режима I_m .

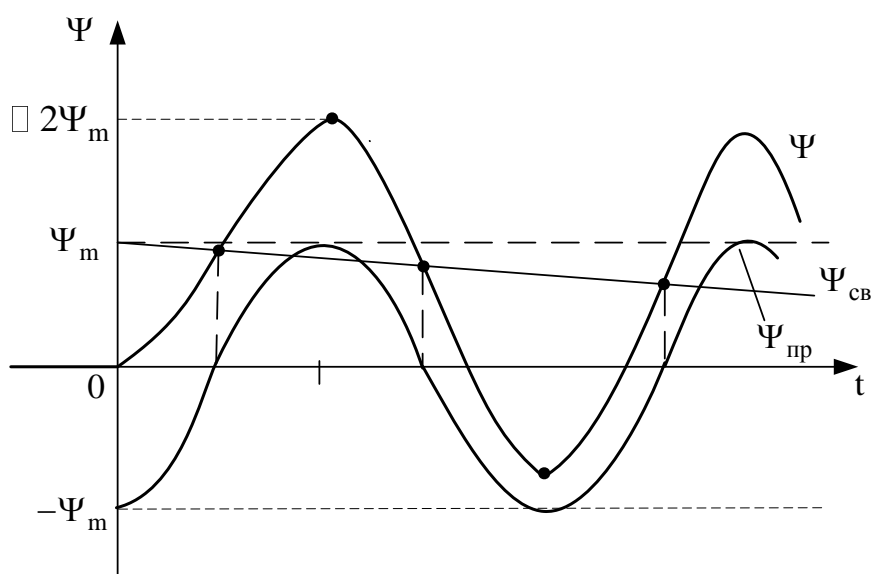


Рисунок 13.12

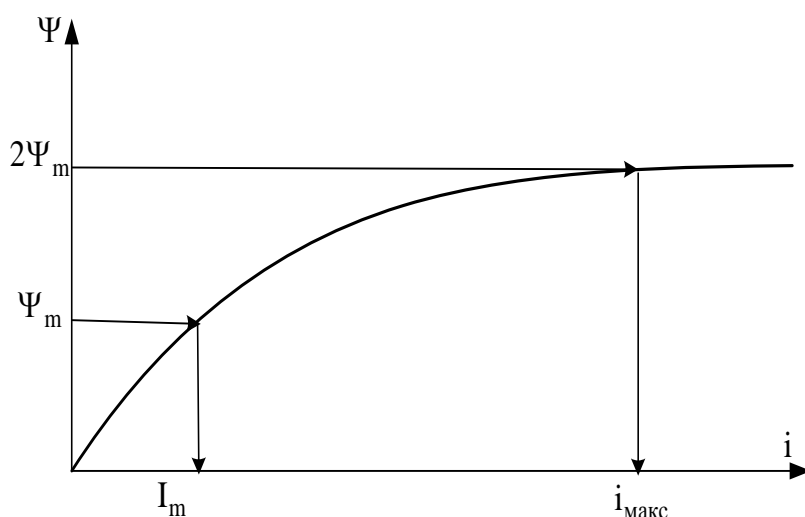


Рисунок 13.13

На рис. 13.14 изображена зависимость $i(t)$.

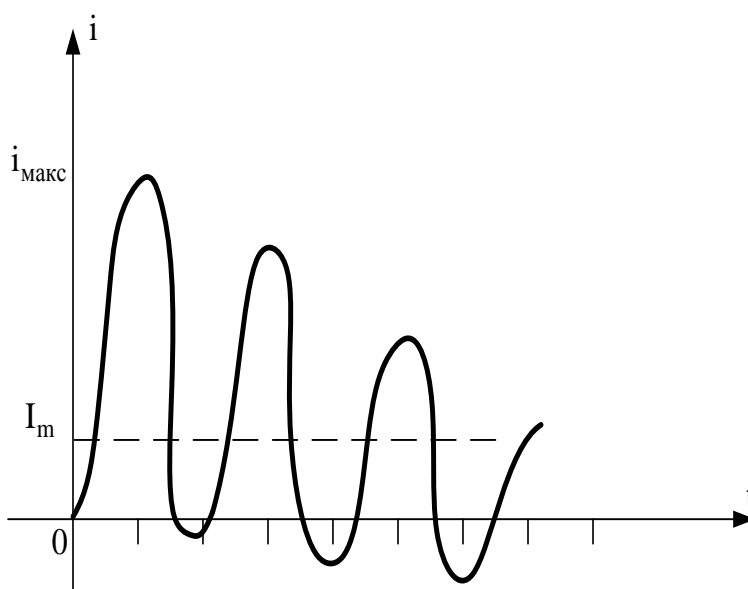


Рисунок 13.14

Такой всплеск тока может вызвать механические разрушения обмотки, т.к. электродинамические усилия пропорциональны квадрату тока.

Поэтому мощные трансформаторы нельзя включать в режиме холостого хода. Их обычно включают через дополнительные сопротивления, которые затем замыкают накоротко. Таким образом, ограничивается величина первичного тока при включении трансформатора.

В современной технике использование нелинейных цепей открывает чрезвычайно широкие перспективы благодаря особым свойствам этих цепей.

Рассмотренные примеры не охватывают всего разнообразия возникающих явлений и методов их расчета. Эта область науки и техники быстро и непрерывно развивается, и грамотный инженер, при наличии основ знаний теоретической электротехники, может, следя за современными публикациями, осваивать новейшие методики расчета и анализа нелинейных цепей и их практического использования.

СОДЕРЖАНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ	3
I. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.....	4
1. Электростатическое поле.....	4
1.1. Напряженность электростатического поля.....	4
1.2. Электрическое поле точечного заряда.....	6
1.3. Работа сил электрического поля. Электрическое напряжение и потенциал.....	9
1.4. Потенциал поля точечного заряда.....	12
1.5. Эквипотенциальные линии.....	13
1.6. Дифференциальная связь между напряженностью и потенциалом.....	14
1.7. Электрическое поле в вещественной среде. Поляризация диэлектриков.....	16
1.8. Поток вектора сквозь поверхность.....	19
1.9. Теорема Гаусса для вакуума.....	19
1.10. Теорема Гаусса в интегральной форме для внешней среды.....	20
1.11. Электрическое поле равномерно заряженной электрической оси.....	22
1.12. Электрическое поле двух параллельных Разноименных электрических осей.....	24
1.13. Граничные условия в электрическом поле.....	27
1.14. Электрическая емкость и методика ее определения.....	31
1.15. Энергия электростатического поля.....	34
2. Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде (Стационарное электрическое поле).....	36
2.1. Ток проводимости и его плотность.....	36
2.2. Основные законы стационарного электрического поля.....	37

2.3. Граничные условия для электрического поля в проводящей среде	40
2.4. Формальная аналогия стационарного и электростатического полей.....	41
2.5. Соотношение между сопротивлением и емкостью.....	42
2.6. Методика расчета сопротивлений.....	43
3. Магнитное поле постоянных токов.....	46
3.1. Основные величины, характеризующие магнитное поле в пространстве.....	46
3.2. Основные уравнения магнитного поля в интегральной форме...	46
3.3. Граничные условия в магнитном поле.....	47
3.4. Методы расчета магнитного поля.....	49
3.5. Магнитный поток и магнитное потокоцепление.....	52
3.6. Энергия магнитного поля.....	55
3.7. Методика расчета индуктивностей.....	57
3.8. Методика расчета взаимной индуктивности.....	60
II.ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ.....	64
4. Линейные электрические цепи постоянного тока	64
4.1. Закон Ома в различных формах записи.....	64
4.2. Реальные активные элементы цепи и их эквивалентные схемы.	66
4.3. Законы Кирхгофа.....	68
4.4. Работа и мощность цепи постоянного тока. Баланс мощностей.....	69
4.5. Расчет простых цепей постоянного тока.....	72
4.6. Методы расчета сложных цепей постоянного тока.....	79
4.7. Основные теоремы теории линейных цепей.....	89
4.8. Эквивалентные преобразования сложных электрических цепей.....	96
4.9. Передача мощности от активного двухполюсника к пассивному.....	100

5. Линейные электрические цепи переменного тока.....	104
5.1. Физические явления, возникающие в переменных электромагнитных полях.....	104
5.2. Синусоидальные электрические величины.....	106
5.3. Действующее значение гармонического тока.....	107
5.4. Среднее значение синусоидального тока.....	108
5.5. Коэффициенты, характеризующие форму кривой.....	109
5.6. Изображение синусоидальных функций времени вращающимися векторами.....	109
5.7. Понятие о цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами. Понятие о квазистационарных токах.....	110
5.8. Дифференциально-интегральное уравнение элементарной цепи переменного тока.....	112
5.9. Закон Ома для амплитудных и действующих Значений в цепи переменного тока.....	113
5.10. Треугольник напряжений.....	115
5.11. Треугольник сопротивлений.....	116
5.12. Треугольник токов.....	117
5.13. Треугольник проводимостей.....	117
5.14. Связь между сопротивлениями и проводимостями в цепи переменного тока.....	118
5.15. Анализ простейших цепей переменного тока.....	119
5.16. Метод комплексных амплитуд.....	122
5.17. Изображение синусоидальных функций времени комплексными числами.....	125
5.18. Теоремы дифференцирования и интегрирования.....	126
5.19. Закон Ома в комплексной форме.....	126
5.20. Комплексы полного сопротивления и полной проводимости...	127
5.21. Законы Кирхгофа в комплексной форме.....	128

5.22. Расчет последовательного соединения.....	130
5.23. Расчет параллельного соединения.....	131
5.24. Расчет смешанного соединения.....	133
5.25. Мгновенная и средняя мощность цепи переменного тока.....	134
5.26. Активные и реактивные процессы в цепи переменного тока...	136
5.27. Треугольник мощностей.....	138
5.28. Комплексная форма записи мощности.....	139
5.29. Измерение активной мощности.....	139
5.30. Баланс мощностей в цепи переменного тока.....	140
5.31. Резонансные явления в цепи переменного тока.....	140
5.32. Цепи переменного тока с индуктивными связями.....	147
6. Несинусоидальные периодические токи и напряжения в линейных цепях.....	156
7. Трехфазные электрические цепи	159
7.1. Получение трехфазной системы ЭДС.....	159
7.2. Соотношения между линейными и фазными величинами.....	162
7.3. Расчет трехфазных цепей.....	165
7.4. Расчет симметричных трехфазных цепей.....	167
7.5. Мгновенная и средняя мощность симметричной трехфазной цепи.....	168
7.6. Примеры расчета трехфазных цепей.....	170
7.7. Крайние случаи несимметрии трехфазных цепей.....	180
7.8. Измерение активной мощности в трехфазных цепях.....	183
7.9. Образование вращающегося магнитного поля.....	186
8. Теория четырехполюсников.....	189
8.1. Классификация ЧП.....	189
8.2. Общепринятые условные положительные направления токов и напряжений ЧП в зависимости от режимов работы.....	190
8.3. Уравнения ЧП.....	191
8.4. Матричная форма записи уравнений ЧП.....	198

8.5. Сложные ЧП.....	199
8.6. Схемы замещения ЧП.....	201
8.7. Экспериментальное определение первичных параметров ЧП....	205
8.8. Вторичные параметры симметричного четырехполюсника.....	208
8.9. Уравнения симметричного четырехполюсника, записанные через его вторичные параметры.....	211
8.10. Вторичные параметры несимметричных ЧП.....	212
9. Переходные процессы в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами.....	213
9.1. Вводные замечания.....	213
9.2. Сущность классического метода расчета переходных процессов	214
9.3. Законы коммутации.....	215
9.4. Переходные процессы в цепях с одним индуктивным накопителем энергии.....	216
9.5. Переходные процессы в цепях с одним емкостным накопителем энергии.....	230
9.6. Переходные процессы в цепях R, L, C.....	240
9.7. Операторный метод расчета переходных процессов.....	253
9.8. Временной метод расчета переходных процессов.....	267
9.9. Метод переменных состояния.....	273
10. Линейные электрические цепи с распределенными параметрами.....	277
10.1. Первичные параметры линии.....	277
10.2. Дифференциальные уравнения длинной однородной линии...	278
10.3. Дифференциальное уравнение линии в установившемся синусоидальном режиме.....	279
10.4. Решение дифференциальных уравнений линии в установившемся синусоидальном режиме.....	280
10.5. Бегущие волны в линии.....	281
10.6. Определение постоянных интегрирования в Дифференциальных уравнениях линии.....	282

10.7. Линия как четырехполюсник.....	284
10.8. Линия без искажений.....	284
10.9. Линия без потерь.....	285
10.10. Переходные процессы в линиях.....	291
III. Нелинейные электрические и магнитные цепи.....	296
11. Нелинейные электрические цепи постоянного тока.....	296
11.1. Виды сопротивлений нелинейных элементов.....	297
11.2. Методы расчета нелинейных цепей постоянного тока.....	303
12. Магнитные цепи при постоянных магнитных потоках	301
12.1. Основные свойства ферромагнитных материалов.....	301
12.2. Основные допущения, принимаемые при расчете магнитных цепей.....	303
12.3. Основные соотношения, используемые при расчете магнитных цепей.....	304
12.4. Классификация магнитных цепей	307
12.5. Типы задач расчета магнитных цепей.....	308
12.6. Расчет неразветвленных магнитных цепей.....	308
12.7. Расчет несимметричных разветвленных магнитных цепей.....	311
13. Нелинейные электрические цепи переменного тока.....	315
13.1. Потери в стали при переменных магнитных потоках.....	315
13.2. Катушка с ферромагнитным сердечником. Форма кривой тока при синусоидальном напряжении.....	316
13.3. Трансформатор с ферромагнитным сердечником.....	323
13.4. Явление феррорезонанса.....	333
13.5. Методы расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях.....	337
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	340

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Р. Нейман, К.С. Демирчан. Теоретические основы электротехники. В двух томах.- Ленинград, Энергоиздат, Ленинградское отделение. 1981.
2. Г.И. Атабеков. Основы теории цепей. - М.: Энергия, 1969.
3. Методические указания преподавателей кафедры ТОЭ для самостоятельной работы студентов по всем разделам курса ТОЭ.